

PDF hosted at the Radboud Repository of the Radboud University Nijmegen

The following full text is an author's version which may differ from the publisher's version.

For additional information about this publication click this link.

<http://hdl.handle.net/2066/75546>

Please be advised that this information was generated on 2020-10-27 and may be subject to change.

Wiskunde, mystiek en natuurwetenschappen

Henk Barendregt
Faculty of Science
Radboud Universiteit Nijmegen

1. Wiskunde en mystiek lijken onverenigbaar. Wiskunde wordt terecht beschouwd als een van de meest exacte wetenschappen. De op mystieke ervaring gebaseerde inzichten zijn echter subjectief en maken vaak gebruik van niet gedefinieerde begrippen. Sterker nog: mystici zeggen dat hun ervaringen domweg niet in gewone taal zijn uit te drukken. Bovendien waarschuwen zij dat het rationele denken de mystieke ervaring in de weg staat. Een ongunstiger uitgangspunt voor verzoening lijkt niet mogelijk.

Als wij nader onderzoeken wat de grond is van wiskundig inzicht en van mystieke ervaring is, zal de kloof blijken mee te vallen: beide activiteiten zijn fenomenologisch, gebaseerd op innerlijk schouwen. Moeilijker is het om het verschijnsel inzicht via introspectie met de natuurwetenschappen te verzoenen. Deze wetenschappen gaan uit van het zogenaamde derde persoon perspectief en theorievorming over de dingen. De wiskunde en mystiek lijken vanuit een eerste persoon perspectief te opereren. Om toch verbindingen met de natuurwetenschappen te kunnen maken, zullen we voorbij de wiskunde en de mystiek moeten treden. Daarbij zal de wiskunde worden gedefenomenologiseerd en de mystiek worden gereduceerd tot hersenprocessen. Toegegeven, dan zal een groot deel van de diepgang als ervaring verloren gaan. Toch is het methodologisch de moeite waard dit proces te doorlopen. Vergelijk dit met een onderzoeker die zowel op grond van neurofysiologie als op grond van persoonlijke ervaring het verschijnsel orgasme bestudeert. Wie dat onromantisch vindt wijzen we er op, dat wetenschap al eerder een dergelijke kritiek kreeg. Zo was John Keats (1795-1821) van mening dat Newton (1642-1727) met zijn analyse van de regenboog het verschijnsel onrecht aandeed, zie ook Dawkins 2008. Dit was gericht tegen Newton's natuurkundige beschrijving van het fenomeen door middel van het breken van licht. Mijn advies is: geniet van beide! Dit betekent niet dat ik van mening ben dat het zogenaamde qualia probleem ('Waar komt ons bewustzijn vandaan?') is opgelost. Onderzoek naar mystieke ervaring zal moeten kunnen uitleggen waarom deze anders is dan meer alledaagse ervaringen, maar niet wat dat 'ervaren' precies is.

2. Wiskunde kan gedacht worden te zijn ontstaan toen men bij bezit van dingen afzag van de aard ervan en bij bezit van land afzag van de vorm. Deze abstracties hebben geleid tot getal en oppervlakte, de basis voor de arithmetica en geometrie. Men ging rekenen en construeren met de verkregen concepten, en dit maakte het verhandelen van het actuele bezit eenvoudiger. Na deze abstracties van de werkelijkheid stapelde men abstractie op abstractie: hoeveelheid ja, maar hoeveel nee: $3 + 4 > 5$ werd $a + b > c$. Daarna ontstond $f(a,b) \in \mathbb{R}$: de operaties en relaties werden via abstractie gegeneraliseerd. Bewijzen brachten ons eerst van waarheid tot waarheid. Later van potentiële waarheid tot potentiële waarheid. Waren wiskundige begrippen eerst eenduidig te interpreteren, later, vanaf de 19-de eeuw, werden ze poly-interpreteerbaar.

Opgestapelde abstracties komen ook in het dagelijkse leven voor. Het begrip 'donderdag' is er een voorbeeld van. Eerst noemen we perioden van licht 'dag' en perioden van duisternis 'nacht'. Daarna geven we dagen cyclisch terugkerende namen met een periode van zeven dagen, een week. Donderdag is de veerde dag van zo'n week. Bij de wiskunde is de toren van abstracties wel een heel stuk hoger, dan bij het begrip 'donderdag'. Het indrukwekkende van die toren van wiskundige begrippen is dat met hogere abstracties inzichten kunnen ontstaan over de laagste verdieping, die van de natuurlijke getallen

0,1,2,3, ... enzovoorts.

Een beroemde stelling luidt als volgt.

Voor alle natuurlijke getallen a, b, c, n , met $a, b, c > 0$ en $n > 2$, geldt:

$$a^n + b^n \neq c^n.$$

(Voor $n=2$ zijn er de vele bekende zogenaamde Pythagoreïsche drietallen: $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$. Maar de stelling zegt dat voor $n>2$ analoge drietallen niet bestaan.) Deze stelling werd in 1637 zonder bewijs uitgesproken door de Fransman Pierre de Fermat. Pas in 1995, na 358 jaar, werd deze stelling door de Engelsman Andrew Wiles bewezen, gebruikmakend van vele wiskundige hulpmiddelen en theorieën ontwikkeld in de twintigste eeuw.

Het is de moeite waard om te spreken over de drijfveer van de wiskundige. Het verlangen naar het goede, schone en het ware wordt wel eros genoemd. Het gaat hier over een gemoedstoestand die wil weten en niet eerder rust. Die toestand, ook wel aangeduid met 'de interesse', wordt in Mann 1947 dan ook gezien als een affect dat zelfs hoger is dan de liefde. Musil 1996, p. 144, schreef over de man zonder eigenschappen (die als wiskundige over zijn vak nadacht):

“De nauwkeurigheid, kracht en zekerheid van dit denken, die in het leven hun weerga niet kennen, vervulden hem bijna met zwaarmoedigheid.”

Elders in het zelfde werk schrijft Musil:

“Als je in plaats van wetenschappelijke beschouwingen levensbeschouwingen zou nemen, in plaats van hypothese poging en in plaats van waarheid daad, zou er geen enkel levenswerk van een belangrijk natuuronderzoeker of wiskundige bestaan dat wat moed en revolutionaire kracht de grootste daden in de geschiedenis niet verre zou overtreffen.”

Wiskunde, hoewel gebaseerd op abstracties uit het dagelijkse leven, heeft na een paar abstractieslagen steeds minder te maken met de gewone werkelijkheid. Het is een wonder dat dit spel nuttig is voor het begrijpen van de natuur. Wigner 1963 noemt dat 'De onredelijke toepasbaarheid van de wiskunde op de natuurwetenschappen'. Wilt u meer weten over dit mooie vak, nodigt u dan wiskundigen uit hier tot u te spreken, of gaat u naar ze toe. Ik moet nu verder om me aan mijn opdracht te houden.

3. Mystiek bestaat uit ervaring. In Staal 1975 wordt benadrukt dat het als zodanig noch rationeel noch irrationeel is, maar wel op rationele wijze bestudeerd kan worden. Maar niet iedere ervaring is mystiek. Mystiek bestaat uit ervaringen welke vaak kortstondig en bijzonder krachtig zijn en te maken hebben, niet met een bepaald object van onze waarneming, maar met het waarnemen zelf. Men heeft een helder overzicht, zo lijkt het althans. Men is geconcentreerd, vervuld met vreugde en toch gelijkmoedig. Woorden schieten te kort om de toestand te beschrijven. Wat belangrijk is om een beter begrip te hebben over de mystieke inzichten: deze gaan niet over de dingen, maar deze gaan over hoe wij de dingen waarnemen.

Vaak bevat een beschrijving van de mystieke ervaring logische contradicties. Hoewel ik hier geen voorstander van ben, is dat wel te begrijpen. In de mystiek worden ervaringen beschreven welke niet alledaags zijn. Probeert men deze dan met de alledaagse taal te beschrijven, dan ontstaat er een frictie tussen betekenissen. Om dit duidelijk te maken kun je aan het volgende voorbeeld denken. Stel dat op een eiland alleen mensen wonen die slechts zwart-wit kunnen zien. In de logica van de eiland bewoners is iets zwart of wit. In hun taal wordt 'wit' ook wel 'niet-zwart' genoemd. Op een goede dag krijgt iemand op een gegeven moment de ervaring die wij krijgen als wij groen zien. Zij zegt: “Ik heb iets

gezien. Het is noch zwart, noch niet-zwart; en het is prachtig!” Voor de strikte logica van de eilandbewoners is dit onmogelijk, maar wij weten beter. In Barendregt 1988 geef ik aan, dat zelfs sterkere contradicties op dergelijke manier begrijpelijk gemaakt kunnen worden.

Door de overweldigende ervaring voelt de mysticus zijn of haar 'ik' verdwijnen. Soms ook voelt men het ik samensmelten met het al. Dit zijn serieuze ervaringen die onderzocht kunnen worden. Men kan dat doen door zelf op zoek te gaan naar mystieke ervaringen. Hoewel men deze niet kan afdwingen, kan wel de kans op het verschijnen ervan vergroot worden. Een andere mogelijkheid is het bestuderen van mystieke teksten. Deze zullen slechts zelden de ervaring zelf oproepen, hoewel dat toch af en toe voor kan komen. Bij lezen gaat men vaak rationeel denken en hier waarschuwt de mystica dat dit soort denken de ervaring in de weg zit. In ieder geval kan het lezen van de mystieke werken inspirerend zijn.

Mijn voorkeur heeft het om de mystieke ervaringen uit de theologische context te halen. Daarbij beperk ik me tot de volgende definitie van mystiek: bewustzijnstoestand met een hoge mate van concentratie, vreugde en gelijkmoedigheid, verkregen door een globale observatie van het bewustzijn, waarbij de ervaring van het zelf wegvalt. Daarbij maakt men in beschouwingen over Christelijke mystiek onderscheid tussen de intellectuele mystiek en de erotische. Om te begrijpen dat de mystiek ook erotische aspecten heeft kan men denken aan de volgende regels van Baudelaire 1857 uit het gedicht *L'Invitation au voyage*, prachtig op muziek gezet door H. Duparc.

*Là il n'y a qu' ordre et beauté,
luxe, calme et volupté.*

Vrij vertaald:

*Daar heerst slechts schoonheid en rust,
luxe, kalmte en wellust.*

Het gaat hier wel om een reis met een geliefde, daarom is Baudelaire dan ook geen mysticus. Maar om zich een ervaring uit de erotische mystiek voor te stellen, is beschreven gemoedstoestand een redelijk begin.

De mystieke ervaring van extase en verrukking kan men systematisch nastreven. Dat gebeurt door verschillende vormen van meditatie. Of en wanneer men de ervaring dan daadwerkelijk bereikt kan niet met zekerheid voorspeld worden. Men trekt zich terug in rust en richt de aandacht op één ding, bijvoorbeeld de ademhaling. Deze wordt geobserveerd. Komen er hindernissen, bijvoorbeeld in de vorm van verlangen, tegenzin, rusteloosheid, slaperigheid of twijfel, dan merkt men bijvoorbeeld op “O, verlangen; al eens eerder gehad!” of korter “Weten, weten”. Op deze manier neemt men afstand van het verlangen. Men gaat niet in op het onderwerp van het verlangen. Iets lastiger zijn de conditioneringen die bestaan uit een 'coalitie tussen voelen en denken'. Voordat deze getemd kunnen worden moeten ze uit elkaar worden getrokken: “Gevoel (prettig, neutraal, onprettig) en denken ('daar wil ik meer/minder van').”

Verschillende vormen van mystieke ervaring vormen de hoogtepunten van de concentratie meditatie. In de Boeddhistische mystiek kent men de vier *jhana's* (absorpties). [Dit Pali woord is in het Sanskrit 'Dhyana' en werd in het Chinees 'Chan', in het Koreaans 'Sun' en tenslotte in het Japans (en ook in het Engels en Nederlands) 'Zen'.] De eerste jhana heeft als mentale factoren *extase, verrukking, compassie* en *gelijkmoedigheid*. Het verschil tussen extase en verrukking wordt wel als volgt omschreven. Wanneer men na een lange tocht door de woestijn een oase ziet, dan is men in extase en men rent naar de waterbron. Heeft men zich verzadigd met water, dan is men in een gelukzalige verrukking. De extase heeft iets onrustigs. Daarom leert de mediterende de extase achter zich te laten en de tweede

jhana binnen te gaan, met alleen nog *verrukking*, *compassie* en *gelijkmoedigheid*. Deze jhana is stabielier dan de eerste. Nu wordt de leerling aangeraden de verrukking los te laten en dan komt deze in de derde jhana met alleen *compassie* en *gelijkmoedigheid*. Weer is er meer stabiliteit. Tenslotte wordt ook de compassie losgelaten en ontstaat de vierde meest stabiele jhana met alleen *gelijkmoedigheid*. (Naast deze zogenaamde zintuigelijke jhana's zijn er ook vier niet-zintuigelijke jhana's: deze gaan niet uit van input van de fysieke zintuigen maar van concepten die plaatsvinden in de geest: 1. oneindige ruimte, 2. oneindig bewustzijn, 3. leegte, 4. noch perceptie, noch niet-perceptie. Hier gaan we verder niet op in.) Het is niet moeilijk om extase, verrukking en compassie over te plaatsen naar gevoelens bekend uit de liefde: libido, post-orgasme en inter-menselijke binding.

Op het moment dat de mystieke ervaring bereikt is zegt de leraar dat de mediterenden ook deze zeer verheven mentale toestand moeten loslaten. “Moet dat heus,” vraagt een van de leerlingen, “mogen we er niet eventjes van genieten?” Het strenge en bijna huiveringwekkende antwoord van de compassievolle leraar is: “Het is verloren tijd! (*It is a waste of time!*)”

Wat is hier aan de hand? Na de extase voelt het neerdalen naar een meer gewone bewustzijnstoestand aan als het verliezen van houvast. Men verliest zelfs zijn mentale houvast. Op dat moment ondergaat men wat Johannes van het Kruis noemt 'de donkere nacht van de ziel'. In ons normale bewustzijn worden verschillende zaken 'gebonden', bij elkaar gebracht. Dit is bijvoorbeeld het geval met visuele en auditieve input. Of men hoort een gesproken woord en men denkt aan de betekenis. Tijdens de donkere nacht van de ziel wordt men 'ontbonden', men dissocieert. Vaak gaat dissociatie gepaard met gevoelens van angst en gevaar. Maar de tijdelijke dissociatie heeft men nodig om aan de houdgreep van de coalitie van emoties te ontkomen. Kleine kinderen spelen wel eens het spelletje waarbij een woord vaak herhaald wordt: “Rabarber, rabarber, ...” Op een gegeven moment heeft het woord zijn betekenis verloren. Dit is een lichte vorm van dissociatie. Bij sterkere vormen van dit verschijnsel valt er meer uit elkaar. De inzichtmeditatie is erop gericht deze dissociatie te onderzoeken en de oer-angst voor het uiteenvallen te leren temmen.

Concentratie meditatie werkt bindend, reïficerend: een proces wordt ervaren als ding. Men komt erdoor tot rust. In de inzicht meditatie daarentegen leert men te dissociëren, terwijl men daarbij tegelijkertijd leert er geen angst voor te hebben. De eerste stap in dit proces bestaat uit het ontwikkelen van opmerkzaamheid (mindfulness). Voor het definitief temmen van de oer-angst is het nodig gelijkmoedigheid, kalmte en vreugde te ontwikkelen. Daarnaast is het nodig zich te kunnen overgeven: het 'ik' bestaat, maar niet als een vaststaand ding; het 'ik' bestaat uit een dynamische proces, dat we reïficeren, dat wil zeggen tot ding maken. Als we beseffen dat we dit doen, dan zullen we een stuk flexibeler zijn.

4. Hoe kunnen de wiskunde en de mystiek nu verzoend worden? Hoewel met recht gesteld kan worden dat wiskunde de meeste exacte wetenschap is, berust zij op fenomenologie. Onze geest creëert en verifieert de wiskunde. Het is waar dat de wiskunde uitvoerig gebruik maakt van berekeningen en bewijzen; daardoor is ze objectief. Maar om in te zien dat een berekening correct en van toepassing is, heeft men een mentaal oordeel nodig: 'het is goed'. Nog meer heeft men dat oordeel nodig om in te zien of een bewijs al dan niet correct is. En op de eerste plaats heeft men het innerlijke schouwen nodig voor het scheppen van wiskunde. Heeft de introspectie het dan altijd bij het rechte eind? Nee, niet altijd: men moet een lange weg afleggen om wiskundige te worden, en deze weg is noch koninklijk (een wens in het Egypte van 400 voor Chr.), noch studentvriendelijk (een wens in het Nederland van 2000 na Chr.), maar wel zeer boeiend. Het juiste wiskundige schouwen moet ontwikkeld worden door vallen en

opstaan. Daardoor is wiskunde onderhevig aan het gevaar van false profeten, die niet voldoende getraind zijn in de juiste techniek. Toch is wiskunde niet elitair. Indien een jonge student(e) op goede gronden iets belangwekkends beweert en dat duidelijk kan opschrijven of uitleggen, dan zal op grond daarvan de wiskundige gemeenschap vroeg of laat zien dat hij of zij gelijk heeft. Zijn de introspectieve overwegingen niet correct, dan zal er geen erkenning volgen. Het forum van de wiskundigen heeft tot nu toe eensluidend gesproken. Dat betreft de correctheid van een stuk wiskunde.

Zowel de wiskunde als de mystiek berusten op persoonlijke ervaring, welke in beide gevallen pas optreedt na voldoende oefening. Voor beide vormen van inzicht is een vereiste het ontwikkelen van concentratie, meestal verkregen door gediciplineerde doorzetting. Beide soorten ervaring gaan vaak gepaard met schoonheidsbeleving, waarbij het 'ik' wegvalt. Dat is dan ook de reden dat in beide gebieden de vergelijking met eros gemaakt wordt. Er is wel een verschil in gerichtheid. De wiskunde houdt zich bezig met concepten in hun zuiverste vorm, mystiek in eerste instantie met bewustzijnstoestanden, ook weer in hun zuivere vorm. De gemeenschappelijke basis van de fenomenologie voor de wiskunde en de mystiek werd reeds benadrukt door Husserl 1901, Brouwer (zie van Atten 2003), Gödel 1995 en Bernays (zie Hao Wang 1997). Brouwer geeft zelfs een fenomenologische motivatie voor sommige van zijn wiskundige axioma's.

5. We gaan nu in op de vraag of de introspectieve wiskunde ook natuurwetenschappelijk erkend kan worden. Enerzijds zal de natuurkunde de wiskunde wel moeten erkennen: zij is er volledig van afhankelijk. Maar vaak gebruikt de natuurwetenschap de wiskunde op een slechts oppervlakkige manier. Het motto 'meten is weten' doelt op het gebruik van getallen met benaderingen. Deze methode geeft niet het wezen van de wiskunde weer. Wiskunde is niet kwantitatief maar kwalitatief. Kwantiteit, zeker welke gemeten kan worden en is uit te drukken in de 'wetenschappelijke notatie', toont slechts een zeer beperkt deel van de kwalitatieve mogelijkheden.

Het is echter mogelijk om de wiskunde in haar volle glorie natuurwetenschappelijk te duiden. Hiervoor heeft Aristoteles twee belangrijke bijdragen geleverd, de beschrijving van de axiomatische methode en de aanzet om de logische wetten te begrijpen.

Aristoteles beschreef de opbouw van de wiskunde als volgt. Er zijn wiskundige *objecten* en wiskundige *eigenschappen*. Uit bestaande objecten en eigenschappen kunnen nieuwe geconstrueerd worden door middel van definities. Wiskundige eigenschappen gelden al dan niet voor sommige van de objecten. Wanneer een eigenschap geldig is, dan noemen we dat een '*stelling*'. Stellingen kunnen uit eerder verkregen stellingen afgeleid worden. Aristoteles stelde dat de opbouw van de wiskunde ergens moest beginnen om een oneindige teruggang te voorkomen. (Kinderen ontdekken dat ze na ieder antwoord op een vraag opnieuw 'Waarom?' kunnen zeggen. Dat levert dan een dergelijke te vermijden oneindige teruggang op.) Aristoteles poneerde dat men begint bij begrippen die niet nader gedefinieerd worden, de zogenaamde primitieve begrippen. Deze begrippen voldoen aan eigenschappen welke niet nader bewezen worden, maar worden gepostuleerd als de zogenaamde *axioma's*. Vandaar komt men verder met strakke logica.

Dit tweede relevante onderwerp, de logica, begon ook bij Aristoteles. Hij ging reflecteren over de manier waarop wiskundigen hun redeneringen uitvoeren en kwam tot een aantal algemeen geldige logische regels. Een beperking daarvan was nog wel dat niet alle logische operatoren bestudeerd werden (wel 'voor alle', 'als ...', 'dan ...', maar niet 'en', 'of', 'er bestaat'). Bovendien beschouwde Aristoteles geen binaire predicaten, zoals 'a is groter dan b', maar alleen unaire eigenschappen, zoals 'a

is een priemgetal'. Toch kunnen wij zijn moed bewonderen, om niet naar de wiskundige inhoud te kijken, maar naar het proces van de theorievorming. Aristoteles' leermeester Plato was er in ieder geval tegen.

Een paar decennia na de formulering van Aristoteles' axiomatische methode voor de wiskunde schreef Euclides het boek 'De Elementen', waarin hij op indrukwekkende wijze een axiomatische opbouw van de meetkunde gaf. Deze opbouw was vrijwel volmaakt. De onvolkomenheden werden pas door Hilbert 1999 rond 1900 definitief verbeterd. In het Nederlands is er een mooi werk van van der Waerden 1937 dat hetzelfde doet.

De axiomatische methode van Aristoteles is na meer dan twee millenia nog steeds vrijwel het zelfde gebleven. Frege voltooide na ongeveer 2300 jaar in 1879 de kweeste naar de logica. (En Gödel 1930 toonde aan dat de logica van Frege volledig was: wat men intuïtief af kon leiden kon men nu ook formeel afleiden.) Vanaf dat moment kon de wiskunde geheel geformaliseerd worden. Dat wil zeggen dat alle stellingen vanuit de axioma's volledig bewezen konden worden met de logica zoals die door Frege geformaliseerd was. Het was Frege zelf die met het formaliseren begon. Maar hij ging jammergenoeg uit van een axiomatisch systeem waarvan later zou blijken dat het een innerlijke tegenspraak bevatte (en daarom alles kon afleiden wat men maar zou willen). Deze tegenspraak werd ontdekt door Russell. Deze begon, samen met Whitehead, opnieuw de wiskunde te formaliseren. Hoewel Russell en Whitehead hiermee niet erg ver zijn gekomen, is hun systeem door Gödel 1931 bestudeerd. In dit beroemde artikel bewees hij dat indien het systeem vrij is van contradicties, dan is het *onvolledig*. Dat houdt in dat er uitspraken zijn welke noch bewezen, noch weerlegd kunnen worden. Voortbouwend op Gödel's werk, maar met toevoeging van geheel nieuwe ideeën, bewees Turing in 1936 dat het systeem van Russell en Whitehead ook nog eens *onbeslisbaar* is: er is geen algoritme dat bepalen kan of een uitspraak al dan niet bewijsbaar is. De nieuwe ideeën van Turing hebben later tot de moderne computer geleid. Het bijzondere van de computer is dat het één apparaat is dat alle mogelijke taken kan uitvoeren als men het op de juiste manier programmeert.

In de tweede helft van de twintigste eeuw ontstond rond 1968 het idee van een *defenomenologisering* van de wiskunde. Dit begon met het werk van de Nederlandse wiskundige N. G. de Bruijn aan zijn project Automath, zie Nederpelt et al. 1994, voor de automatische verificatie van geformaliseerde wiskunde teksten. Het bleek effectief mogelijk een objectieve grondslag te geven aan de wiskunde. Deze was anders dan de intersubjectieve werkelijkheid, welke voorheen beschouwd werd als diepste grond voor de wiskunde. De staat van de wiskunde, de logica en de informatica maakten het mogelijk dat men in een enkele taal zowel willekeurige berekeningen als alle wiskundige concepten kan beschrijven. Bewijzen die in een dergelijke taal geformuleerd worden kunnen door een computer (*proof-assistant*, 'bewijs assistent') op efficiënte wijze op hun correctheid nagekeken worden. Op deze wijze ontstaat er volledige transparantie (alle concepten zijn tot in hun meest kleine detail gedefinieerd), als ook de grootst mogelijke zekerheid (die door het forum van wiskundigen goedgekeurde verzameling van stellingen). De bewijs assistent wordt daarbij op een interactieve manier gebruikt: ideeën en bewijzen komen af van mensen, berekeningen en verificatie van de computer. Verschillende onderzoeksgroepen werken aan deze technologie, waarbij het er om gaat dit op een handige manier te doen. Momenteel vergt het nog behoorlijk veel tijd om een formalisatie uit te voeren. De toepassingen van de automatische bewijsverificatie na formalisatie omvatten methoden om voor software, hardware en systemen de correctheid aan te tonen met de hoogst mogelijke betrouwbaarheid, zie Barendregt 2009.

De defenomenologisering van de wiskunde wordt door slechts weinig wiskundigen omarmt. Men vindt het niet nodig om voor verificatie de steun te krijgen van computers. Bovendien vindt men dat de schoonheid van de wiskunde wordt aangetast: “men behoort bewijzen in de geest te hebben, niet in het geheugen van een computer”. De voorkeur voor deze visie op de wiskunde noem ik 'romantisch'; accepteert men ook de geheel geformaliseerde wiskunde dan is dat 'cool'. Dit kan vergeleken worden met de romantische biologie gericht op bloemen en vlinders versus de biologie gericht op cel en molecuul (heel *cool*, zeker als men weet dat dit niveau het hogere globale niveau bepaalt).

Een van de hoogtepunten van de geformaliseerde wiskunde is het volledig machine geverifieerde bewijs van de vier kleuren stelling door de Canadees Gonthier 2008: “Iedere landkaart op een bol of in het platte vlak kan met maximaal vier kleuren gekleurd worden zodat landen die elkaar raken verschillende kleuren hebben.” (Op een torus (donut) is dit niet waar, daar zijn maximaal zeven kleuren nodig.) De Vierkleurenstelling was reeds door Appel en Haaken 1976 'bewezen', maar het bewijs was dermate lang en het bevatte verder een lange computer berekening, dat men minder zeker was dan normaal van de correctheid van de uitspraak. Bovendien zaten er foutjes in het computer programma. Door Gonthier's formalisatie en verificatie heeft men nu de grootst mogelijke zekerheid verkregen.

6. Tegen het einde van de twintigste eeuw verbrak men het taboe op neurofysiologische onderzoek naar aspecten van het bewustzijn. De belangrijkste vraag (Chalmers 1996 '*The hard question*') is de volgende: “Waar komen de qualia vandaan?” Het begrip qualium kan niet precies gedefinieerd worden, maar drukt uit 'de ervaring van bijvoorbeeld de kleur blauw, zoals deze onmiddellijk aan ons gegeven is wanneer wij een blauw voorwerp zien'. Maar deze vraag kan men maar beter nog even laten liggen. Eenvoudiger vragen zijn: wat is *concentratie*, wat is *opmerkzaamheid*, waarom hebben deze gemoedstoestanden gunstige effecten op het gedrag en de gezondheid van de persoon? En verder: hoe ontstaat het gevoel van eenheid in het bewustzijn, van controle-uitoefening, van het zelf? Cognitieve psychologen spreken over *agency*.

In de zogenaamde neurofenomenologische methode wordt een proefpersoon aan tests en fysiologische metingen (EEG, MEG en fMRI) onderworpen. De proefpersoon moet aangeven in welke van een van te voren afgesproken verzameling bewustzijnstoestanden hij of zij bevindt. Op deze manier hoopt men meer inzicht te krijgen in mystieke ervaring. Ook hoopt men essentiële aspecten van de verschillende vormen van meditatie te kunnen onderzoeken. Men ziet dat mediterenden op verschillende plaatsen een dikkere hersenschors hebben en dat zij beter in staat zijn snel opeenvolgende cijfers van letters te onderscheiden. Bij dit laatste ziet men aan het EEG dat er een andere waarnemingsstrategie gehanteerd wordt (onderzoek van H. Slagter et al. 2007).

Tenslotte wil ik op grond van meditatie ervaring en bescheiden kennis van de neurowetenschappen een paar hypothesen formuleren.

In de cognitieve psychologie kent men het 'binding-problem': hoe worden verschillende relevante aspecten van de werkelijkheid bijeengebracht? De hypothese van Chr. von der Malsburg 1981, later uitgewerkt door W. Singer 1999, is dat dit gebeurt door middel van neurale synchronisatie. Dit komt erop neer dat een neuronen welke bij elkaar behorende patronen coderen samen in hetzelfde ritme (wat neerkomt op de zelfde golflengte gaan zitten) gaan vuren. P. Uhlhaas et al. 2008 tonen aan dat er bij psychiatrische patienten een duidelijk verminderde synchroniciteit optreedt.

Mijn hypothesen zijn nu de volgende.

1. *Concentratie meditatie bevordert binding en daarmee neurale synchronisatie.*

2. *Inzichtmeditatie tijdens zijn dissociatieve fases, gaat gepaard met lagere neurale synchronisatie.*
3. *De symptomatische onderdrukking van de dissociatie maakt gebruik van neuromodulators zoals opiaten.*
4. *De zuivering van de geest, ontwikkeld door opmerkzaamheid, legt nieuwe neurale paden aan, waarbij informatie minder door het limbische systeem loopt. Hierdoor wordt het centrum voor angst, de amygdala, minder geactiveerd.*

Dit laatste verklaart wellicht dat gevorderde meditatoren flexibeler en vrijer in het leven staan. Ook al zijn er 'tegenslagen', die het leven altijd brengen zal, het dissocierende effect ervan wordt door hen gemakkelijker gedragen. Er is geen onderdrukking nodig, omdat men het verschijnsel kent en getemd heeft. Dit is vergelijkbaar met een astronaut, die door zijn of haar training geen pilletje tegen reismisselijkheid nodig heeft, tijdens verblijf buiten de aarde in gewichtloosheid.

Tenslotte een hypothese over de werking van opmerkzaamheid. Zie Barendregt 2005.

5. *Opmerkzaamheid is een vorm van meta-bewustzijn, dat mogelijk is omdat de menselijke geest als computationeel model Turing volledig is en daardoor over zichzelf kan reflecteren.*

Hier aangeland besluiten we met weer een citaat uit Musil 1996, dat verband houdt met de kracht van zelf-reflectie en de wiskunde.

“Het is te begrijpen dat een ingenieur opgaat in zijn specialisme in plaats van in de vrijheid en ruimte van de ideeënwereld uit te komen, al worden zijn machines tot aan de uithoeken van de aarde geleverd; want hij hoeft evenmin in staat te zijn het gedurfde en het nieuwe van de ziel van zijn techniek over te dragen op zijn persoonlijke ziel als een machine in staat is om de aan haar ten grondslag liggende infinitesimaalvergelijkingen op zichzelf toe te passen. Van de wiskunde kan dat niet gezegd worden; die is de nieuwe denkmethode zelf, de geest zelf, daarin liggen de bronnen van de tijd en de oorsprong van een kolossale transformatie.”

Dit geeft weer een verband aan tussen de wiskunde en de mystiek, welke beide een objectiverende houding aannemen. In Bitbol 2008 wordt betoogd dat de fenomenologische methode en uiteindelijk het bewustzijn de grondslag voor al het kennen vormt.

Literatuur

van Atten, M.
On Brouwer, Wadsworth, 2003.

Barendregt, H.P.
Buddhist Phenomenology, Part I. *Proceedings of the Conference on Topics and Perspectives of Contemporary Logic and Philosophy of Science*, Cesena, Italy, January 7-10, 1987, (Ed. M. dalla Chiara), Clueb, Bologna, 1988, 37-55. URL: <www.cs.ru.nl/~henk/BP/bp1.html>.

Mysticism and beyond, Buddhist Phenomenology, Part II.
The Eastern Buddhist, New Series, vol XXIX, 1996, 262-287.
URL: <www.cs.ru.nl/~henk/BP/bp2.html>.

Reflection and its use: from Science to Meditation.

Spiritual Information, ed. Charles L. Harper, Jr., Templeton Foundation Press, 2005, 415-423.

Proofs of Correctness in Mathematics and Industry, *Wiley Encyclopedia of computer science and engineering*, ed. B.W. Wah, Wiley, 2009, 2284-2290.

Baudelaire, Ch.

Les fleurs du mal, 1857; édition Garnier-Flamarion, 1964.

Bitbol, M.

Is Consciousness Primary? NeuroQuantolog, 6 (1), 2008, 53-71.

Chalmers, D.

The Conscious Mind, New York: Oxford University Press, 1997.

Dawkins, R.

Science, Delusion and the Appetite for Wonder, Penguin books, 2008.

Frege, G.

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle a. S., 1879.

Gödel, K.

Über die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik Akademische Verlagsgesellschaft*, Leipzig 36, 2, 1930, 349-360.

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 1931, 173-98.

Collected works III: Unpublished essays and lectures, ed. S. Feferman et al., Oxford University Press, 1995.

Gonthier, G.

Formal Proof--The Four-Color Theorem, *Notices of the American Mathematical Society* 55 (11), 2008, 1382-1393.

Hilbert, D.

Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1999, (herdruk).

Husserl, E.

Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis, Max Niemeyer, Halle, 1901.

Mann, Th.

Doktor Faustus, Hermann-Fischer Verlag, Stockholm, 1947.

- von der Malsburg, Chr.
The correlation theory of brain function, 1981, reprinted in *Models of neural networks II*, ed. E. Domany, Springer, 1994, 95-119.
- Musil, R.
Der Mann ohne Eigenschaften, Rowohl, 1952.
- Nederlandse vertaling door I. Lesener:
De man zonder eigenschappen, Meulenhoff, Amsterdam, 1996.
- Nederpelt, R. P., J. H. Geuvers and R.C. de Vrijer
Selected papers on Automath, Elsevier, 1994.
- Singer, W.
Neuronal synchrony: a versatile code for the definition of relations? *Neuron* 24(1), 1999, 49-25.
- Slagter, H.A. et al.
Mental training affects distribution of limited brain resources.
PLoS Biol. 5(6), 2007, e138.doi:10.
- Staal, F.
Exploring Mysticism, A Methodological Essay.
Center for South and Southeast Asia Studies, 1975, UC Berkeley.
- P. J. Uhlhaas, C. Haenschel, D. Nikolic and W. Singer
The Role of Oscillations and Synchrony in Cortical Networks and Their Putative Relevance for the Pathophysiology of Schizophrenia, *Schizophrenia Bulletin*, 2008, doi:10.1093/schbul/sbn062.
- van der Waerden, B.L.
De logische grondslagen van de Euclidische meetkunde, Noordhoff, 1937.
- Wang, Hao
A Logical Journey, From Gödel to Philosophy, Bradford Books, 1997.
- Whitehead, A.N., and B. Russell.
Principia Mathematica,
3 vols, Cambridge University Press, 1910, 1912, and 1913.
- Wiles, A.
Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem,
Annals of Mathematics 141 (3), 1995, 443–551.
- Wigner, E.P.
The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,
Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. 1, 1960, 1-14.