STRUCTURES DE CATÉGORIE DE MODÈLES À LA THOMASON SUR LA CATÉGORIE DES 2-CATÉGORIES STRICTES

par

Dimitri Ara

Résumé. — Dans son article *Théories homotopiques des 2-catégories*, Jonathan Chiche étudie les théories homotopiques sur 2-$\mathcal{C}at$, la catégorie des petites 2-catégories strictes, données par des classes d'équivalences faibles qu'il appelle localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$. Ces localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ sont une généralisation 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental dégagée par Grothendieck dans *Pursuing stacks*. Dans ce texte, nous déduisons des résultats de Jonathan Chiche et de résultats que nous avons obtenus en collaboration avec Georges Maltsiniotis l'existence, pour essentiellement tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$, d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Nous démontrons que les structures de catégorie de modèles ainsi obtenues modélisent exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la théorie de l'homotopie classique des ensembles simpliciaux.

***Abstract* (Model category structures à la Thomason on 2-$\mathcal{C}at$).** — In his paper *Théories homotopiques des 2-catégories*, Jonathan Chiche studies homotopy theories on 2-$\mathcal{C}at$, the category of small strict 2-categories, given by classes of weak equivalences which he calls basic localizers of 2-$\mathcal{C}at$. These basic localizers of 2-$\mathcal{C}at$ are a 2-categorical generalization of the notion of a basic localizer introduced by Grothendieck in *Pursuing stacks*. In this paper, we deduce from the results of Jonathan Chiche and results we have obtained with Georges Maltsiniotis that for essentially every basic localizer $\mathcal{W}$ of 2-$\mathcal{C}at$, there exists a model category structure à la Thomason on 2-$\mathcal{C}at$ whose weak equivalences are given by $\mathcal{W}$. We show that these model category structures model exactly combinatorial left Bousfield localization of the classical homotopy theory of simplicial sets.

Table des matières

Introduction

Ce texte a été initialement écrit comme un appendice à l'article *Théories homotopiques des 2-catégories* [**5**] de Jonathan Chiche. Sur une suggestion du rapporteur, il a été promu en un article indépendant. Ainsi, même si notre texte se veut auto-contenu, nous encourageons le lecteur à lire *op. cit.*, et notamment son introduction, avant le présent article.

Rappelons le contexte dans lequel se place [**5**]. La topologie algébrique moderne tend à remplacer les espaces topologiques par les objets plus combinatoires que sont les ensembles simpliciaux. Dans *Pursuing stacks* [**9**], Grothendieck propose d'aller plus loin et de fonder la théorie de l'homotopie sur la notion de petite catégorie. Il s'agit en quelque sorte de remonter d'un cran supplémentaire dans la chaîne de foncteurs

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{|\ |} \mathcal{T}op,$$

où N est le foncteur nerf des petites catégories vers les ensembles simpliciaux et $|\ |$ est le foncteur de réalisation topologique. Cela est licite en vertu d'un résultat de Quillen : si on note $\mathcal{W}^1_\infty$ la classe des foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale, alors le foncteur nerf induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}at) \to \mathrm{Ho}(\widehat{\Delta})$$

entre la catégorie $\mathcal{C}at$ localisée en $\mathcal{W}^1_\infty$ et la catégorie homotopique usuelle des ensembles simpliciaux. Grothendieck étudie donc $\mathcal{C}at$ munie de la classe $\mathcal{W}^1_\infty$. Il se rend compte que les résultats qu'il obtient ne dépendent que de quelques propriétés de la classe $\mathcal{W}^1_\infty$. Il appelle *localisateur fondamental* toute classe de foncteurs qui vérifie ces propriétés et continue son étude de la théorie de l'homotopie de $\mathcal{C}at$ dans ce cadre axiomatique. Il conjecture que $\mathcal{W}^1_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture est démontrée par Cisinski dans [**6**]. La théorie de l'homotopie de Grothendieck est exposée dans [**13**].

Dans [**5**] (et dans sa thèse [**3**]), Jonathan Chiche pose les premières bases d'une théorie de l'homotopie à la Grothendieck de 2-$\mathcal{C}at$, la catégorie des petites 2-catégories strictes. Notons $\mathcal{W}^2_\infty$ la classe des 2-foncteurs envoyés sur une équivalence d'homotopie faible simpliciale par n'importe quel foncteur nerf raisonnable, disons le nerf géométrique N_2 : 2-$\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ pour fixer les idées. Jonathan Chiche montre dans [**5**] (le résultat apparaît en fait déjà sous une forme moins générale dans [**4**]) que le foncteur N_2 induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ho}(2\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathrm{Ho}(\widehat{\Delta}),$$

où Ho(2-$\mathcal{C}at$) désigne la catégorie 2-$\mathcal{C}at$ localisée en $\mathcal{W}^2_\infty$. Il définit par ailleurs une notion de localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, analogue 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental de Grothendieck. Il exhibe une bijection entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et de 2-$\mathcal{C}at$ compatible à la localisation. Il utilise cette bijection et le résultat de minimalité de Cisinski pour montrer que $\mathcal{W}^2_\infty$ est le localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ minimal.

Dans une direction complémentaire à l'approche de Grothendieck, Thomason a démontré dans [**16**] l'existence d'une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}^1_\infty$. Il résulte du théorème de Quillen cité plus haut que cette catégorie de modèles est équivalente, au sens de Quillen, avec la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux.

La synthèse de ces travaux de Grothendieck et de Thomason a été effectué par Cisinski dans son livre [**7**]. Celui-ci démontre que pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}at$ satisfaisant à une hypothèse ensembliste anodine, il existe une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Il démontre de plus que les structures de catégorie de modèles ainsi obtenues sur $\mathcal{C}at$ modélisent exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux.

La généralisation 2-catégorique du théorème de Thomason a été obtenue par l'auteur de ce texte et Georges Maltsiniotis dans [**2**]. Plus précisément, nous y démontrons l'existence d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}^2_\infty$. De plus, nous déduisons d'un résultat de Jonathan Chiche déjà cité que cette structure est équivalente, au sens de Quillen, avec la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux. Il est à noter que le texte antérieur [**17**] traite également la question d'une généralisation 2-catégorique du théorème de Thomason mais qu'il contient de sérieuses erreurs (voir l'introduction de [**2**] pour plus de détails).

Le but du présent texte est de démontrer l'analogue 2-catégorique du théorème de Cisinski sur les structures à la Thomason, généralisant ainsi les résultats de [**2**] sur la structure à la Thomason 2-catégorique à un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ essentiellement quelconque. Plus précisément, nous montrons l'existence, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ satisfaisant à une hypothèse ensembliste anodine, d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. On obtient ainsi une famille de structures de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ modélisant exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux. Nous donnons par ailleurs des conditions sur un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ pour que la structure à la Thomason associée, qui est toujours propre à gauche, soit propre à droite.

Les ingrédients utilisés dans cet article sont de trois types. En plus des résultats de [**2**], et en particulier l'existence d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason 2-catégorique pour $\mathcal{W}^2_\infty$, les résultats présentés ici dépendent de manière cruciale de la minimalité du localisateur fondamental $\mathcal{W}^2_\infty$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, obtenue dans [**5**] (théorème 6.37). Cette minimalité résulte du résultat analogue pour les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, démontré par Cisinski dans [**6**], et d'une bijection entre les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ et les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (théorème 6.33 de [**5**]), bijection qui joue également un rôle important dans ce texte. Enfin, nos preuves dépendent de manière essentielle de plusieurs résultats obtenus par Cisinski dans son livre [**7**], et en particulier de la bijection entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et les « Δ-localisateurs test » (théorème 4.2.15 de *op. cit.*).

Notations et terminologie. — Nous nous écarterons peu des notations et du vocabulaire de [**5**]. On notera $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories et $2\text{-}\mathcal{C}at$ la catégorie des petites 2-catégories strictes et des 2-foncteurs stricts. On supprimera systématiquement l'adjectif « strict », les bicatégories ne jouant aucun rôle dans ce texte, et les 2-foncteurs lax ou oplax ne jouant qu'un rôle caché. La catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie A sera notée $\widehat{A}$. On notera Δ la catégorie des simplexes et en particulier $\widehat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On notera N le foncteur nerf $\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ et $i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un ensemble simplicial sa catégorie des éléments. La catégorie des foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ sera notée $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. On notera Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \le 1\}$. On s'écartera légèrement des notations de [**5**] en notant $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf géométrique qui y est noté $N_{\mathrm{l,n}}$. Enfin, si I est une classe de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$, on notera $l(I)$ (resp. $r(I)$) la classe des flèches de $\mathcal{C}$ ayant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport à I.

1. Rappels sur les localisateurs fondamentaux

Dans cette section, on rappelle brièvement la définition des localisateurs fondamentaux, introduits par Grothendieck dans [**9**], et de leur généralisation 2-catégorique, introduite par Chiche dans [**5**]. Nous renvoyons le lecteur à ce dernier texte ou à la thèse [**3**] de Chiche pour plus de détails et références sur les localisateurs fondamentaux.

Définition 1.1. — Soit $\mathcal{W}$ une classe de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{W}$ est *faiblement saturée* si elle satisfait aux conditions suivantes :

(FS1) les identités des objets de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{W}$;

(FS2) la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du 2 sur 3 ;

(FS3) toute flèche i de $\mathcal{C}$ admettant une rétraction r telle que ri soit dans $\mathcal{W}$ est elle-même dans $\mathcal{W}$.

Remarque 1.2. — La condition de faible saturation est une forme faible de la notion de catégorie homotopique au sens de Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith [**8**]. Plus précisément, si $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est une catégorie homotopique au sens de *op. cit.*, alors la classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}$ est faiblement saturée.

1.3. — Si $u : A \to B$ est un foncteur et b est un objet de B, on notera A/b la catégorie « comma », parfois notée $u \downarrow b$, dont les objets sont les couples $(a, f : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et f une flèche de B, et dont les flèches sont les morphismes de A faisant commuter les triangles évidents. On vérifie immédiatement que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, alors pour tout objet c de C, le foncteur u induit un foncteur $u/c : A/c \to B/c$ donné sur les objets par $(a, f) \mapsto (u(a), f)$.

***Définition 1.4* (Grothendieck).** — Un *localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$* est une classe $\mathcal{W}$ de foncteurs satisfaisant aux conditions suivantes :

(LF1) la classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}at$ est faiblement saturée ;

(LF2) pour toute petite catégorie A admettant un objet final, l'unique foncteur $A \to e$, où e est la catégorie finale, est dans $\mathcal{W}$;

(LF3) pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}at$, si pour tout objet c de C le foncteur u/c appartient à $\mathcal{W}$, alors le foncteur u appartient à $\mathcal{W}$.

Exemples 1.5. — L'exemple paradigmatique de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ est la classe des foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

Plus généralement, si $\mathcal{W}$ est la classe des équivalences faibles d'une localisation de Bousfield à gauche de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux, alors la classe des foncteurs dont le nerf est dans $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. (Et par le théorème 2.5, dû à Cisinski, on obtient ainsi tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, à des restrictions ensemblistes près.)

Passons maintenant à la généralisation 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$.

1.6. — Si $u : A \to B$ est un 2-foncteur et b est un objet de B, on notera A/b la catégorie « comma » 2-catégorique définie de la manière suivante :

— les objets sont les couples $(a, f : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et f une 1-flèche de B ;

— si (a, f) et (a', f') sont deux objets, les 1-flèches de source (a, f) et de but (a', f') sont les couples $(g : a \to a', \alpha : f'u(g) \to f)$, où g est une 1-flèche de A et α une 2-flèche de B ;

— si (g, α) et (g', α') sont deux 1-flèches de source (a, f) et de but (a', f'), les 2-flèches de (g, α) vers (g', α') sont les 2-flèches $\beta : g \to g'$ de A telles que
$$\alpha' \circ (f' * u(\beta)) = \alpha,$$

les compositions et identités étant définies de la manière évidente. Cette catégorie est notée $A/\!/^u_{\mathrm{c}} b$ dans [**5**], l'indice c, pour « colax », indiquant l'orientation des 2-flèches de B apparaissant dans la définition des 1-flèches. On renvoie à la section 3 de *op. cit.* pour plus de détails. On vérifie, comme dans le cas catégorique, que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de 2-$\mathcal{C}at$ et c est un objet de C, alors le 2-foncteur u induit un 2-foncteur $u/c : A/c \to B/c$.

On dira, suivant [**5**], qu'un objet z d'une 2-catégorie A *admet un objet final* si pour tout objet a de A, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_A(a, z)$ des flèches de a vers z admet un objet final.

***Définition 1.7* (Chiche).** — Un *localisateur fondamental de* 2-$\mathcal{C}at$ est une classe $\mathcal{W}$ de 2-foncteurs satisfaisant aux conditions suivantes :

($\mathrm{LF}_2 1$) la classe $\mathcal{W}$ de flèches de 2-$\mathcal{C}at$ est faiblement saturée ;

($\mathrm{LF}_2 2$) pour toute petite 2-catégorie admettant un objet admettant un objet final, l'unique foncteur $A \to e$, où e est la 2-catégorie finale, est dans $\mathcal{W}$;

($\mathrm{LF}_2 3$) pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans 2-$\mathcal{C}at$, si pour tout objet c de C le 2-foncteur u/c appartient à $\mathcal{W}$, alors le 2-foncteur u appartient à $\mathcal{W}$.

1.8. — Pour donner des exemples de localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$, nous aurons besoin d'un foncteur nerf 2-catégorique. Dans ce texte, nous privilégierons le nerf géométrique $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$. Rappelons brièvement sa définition. Si C est une 2-catégorie, les n-simplexes de $N_2(C)$ sont donnés par les 2-foncteurs $\widetilde{\Delta_n} \to C$, où $\widetilde{\Delta_n}$ est la 2-catégorie définie de la manière suivante :

— ses objets sont les entiers $0, 1, \ldots, n$;

— si i et j sont deux objets, la catégorie des flèches de i vers j est donnée par l'ensemble des sous-ensembles de $\{i, \ldots, j\}$ contenant i et j, ordonné par l'ordre opposé à l'inclusion, les compositions et identités étant définies de la manière évidente.

Exemples 1.9. — Les exemples 1.5 de localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ se généralisent en des exemples de localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ en remplaçant le nerf usuel par le nerf géométrique. De fait, en vertu du théorème 2.6, dû à Chiche, les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ sont en bijection canonique avec les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$.

Définition 1.10. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ ou de 2-$\mathcal{C}at$, on appellera *$\mathcal{W}$-équivalences* ses éléments.

2. Localisateurs et accessibilité

Le but de ce texte est d'associer à tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ « accessible au sens de Cisinski » une structure de catégorie de modèles sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Commençons par définir cette notion d'accessibilité.

Définition 2.1. — Si S est une classe de foncteurs (resp. de 2-foncteurs), on appellera *localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) engendré par S* l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) contenant S. (On vérifie immédiatement qu'on obtient bien ainsi un localisateur fondamental.) On dira qu'un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) est *accessible au sens de Cisinski* s'il est engendré par un *ensemble*.

Pour démontrer l'existence de la structure de catégorie de modèles annoncée, nous utiliserons la notion intermédiaire de A-localisateur (dans le cas $A = \Delta$).

***Définition 2.2* (Cisinski).** — Soit A une petite catégorie. Notons Mono la classe des monomorphismes de la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A. Un *A-localisateur* est une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(LC1) la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du deux sur trois ;
(LC2) on a l'inclusion $r(\mathsf{Mono}) \subset \mathcal{W}$;
(LC3) la classe $\mathsf{Mono} \cap \mathcal{W}$ est stable par image directe et composition transfinie.

Si $\mathcal{W}$ est un A-localisateur, on appellera *$\mathcal{W}$-équivalences* les éléments de $\mathcal{W}$.

Définition 2.3. — Si S est une classe de flèches de $\widehat{A}$, on appellera *A-localisateur engendré par S* l'intersection de tous les localisateurs contenant S. (On vérifie immédiatement qu'on obtient bien ainsi un A-localisateur.) On dira qu'un A-localisateur est *accessible au sens de Cisinski* s'il est engendré par un *ensemble*.

***Théorème 2.4* (Cisinski).** — *Soient A une petite catégorie et $\mathcal{W}$ un A-localisateur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une structure de catégorie de modèles combinatoire sur* $\widehat{A}$ *dont les équivalences faibles sont les éléments de* $\mathcal{W}$ *et dont les cofibrations sont les monomorphismes ;*
b) *le localisateur* $\mathcal{W}$ *est accessible au sens de Cisinski.*

Démonstration. — C'est une partie du théorème 1.4.3 de [**7**]. □

Si $\mathcal{W}$ est un A-localisateur, on appellera la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles sur* $\widehat{A}$ *associée à* $\mathcal{W}$.

On rappelle qu'on note $i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ le foncteur qui associe à tout ensemble simplicial sa catégorie des éléments et $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf.

***Théorème 2.5* (Cisinski).** — *Le couple de foncteurs*

$$i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at, \qquad N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

induit une bijection

$$\mathcal{W} \mapsto N^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}(\mathcal{W})$$

entre la classe des Δ*-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et la classe des localisateurs fondamentaux de* $\mathcal{C}at$*. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.*

Démonstration. — En vertu du théorème 4.2.15 de [**7**], l'application $\mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}(\mathcal{W})$ définit une bijection préservant l'accessibilité au sens de Cisinski entre la classe des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ dits modelables par Δ et la classe des Δ-localisateurs dits test (voir pour ces deux notions la définition 4.2.21 de *op. cit.*). Il résulte de la proposition 1.5.13 de [**13**] que tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ est modelable par Δ, et du corollaire 2.1.21 et de la proposition 3.4.25 de [**7**] que les Δ-localisateurs test sont exactement les Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. Enfin, le fait que le foncteur N induit un inverse de cette bijection est conséquence de la remarque 4.2.16 de [**7**] et de l'exemple 1.7.18 de [**13**]. □

On rappelle qu'on note $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf géométrique (voir le paragraphe 1.8).

***Théorème 2.6* (Chiche).** — *Le couple de foncteurs*

$$\iota : \mathcal{C}at \to 2\text{-}\mathcal{C}at, \qquad i_\Delta N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$$

où ι *désigne l'inclusion canonique, induit une bijection*

$$\mathcal{W} \mapsto N_2^{-1} i_\Delta^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto \iota^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$$

entre la classe des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ *et la classe des localisateurs fondamentaux de* $2\text{-}\mathcal{C}at$*. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.*

Démonstration. — Voir le théorème 6.33 et les propositions 6.47 et 6.48 de [**5**]. (Rappelons que le foncteur qu'on note dans ce texte N_2 est noté $N_{\mathrm{l,n}}$ dans *op. cit.*) □

Corollaire 2.7. — *Le couple de foncteurs*

$$\iota\, i_\Delta : \widehat{\Delta} \to 2\text{-}\mathcal{C}at, \qquad N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

induit une bijection

$$\mathcal{W} \mapsto N_2^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}\iota^{-1}(\mathcal{W})$$

entre la classe des Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et la classe des localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$*. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des deux théorèmes précédents une fois qu'on a remarqué que le premier d'entre eux entraîne l'égalité

$$N_2^{-1} i_\Delta^{-1} N^{-1}(\mathcal{W}) = N_2^{-1}(\mathcal{W})$$

pour tout Δ-localisateur $\mathcal{W}$ contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. □

2.8. — Les deux théorèmes et le corollaire précédents fournissent une « trijection », qu'on appellera *trijection de Chiche-Cisinski*, entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ et les Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. De plus, cette trijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.

Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire pour obtenir les résultats principaux de ce texte, nous allons consacrer la fin de cette section à comparer la notion d'accessibilité au sens de Cisinski à une notion plus classique d'accessibilité.

Définition 2.9. — Une classe d'objets d'une catégorie accessible $\mathcal{C}$ est dite *accessible* si le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie pleine correspondante dans $\mathcal{C}$ est accessible, c'est-à-dire s'il existe un cardinal régulier κ pour lequel ces deux catégories sont κ-accessibles et le foncteur d'inclusion commute aux limites inductives κ-filtrantes. Une classe de flèches d'une catégorie accessible $\mathcal{C}$ est dite *accessible* si elle est accessible considérée comme classe d'objets de la catégorie des flèches $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, \mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Théorème 2.10 **(Smith).** — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie localement présentable, $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}$ et I un* ensemble *de flèches de $\mathcal{C}$. On note* Cof *la classe $lr(I)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une structure de catégorie de modèles combinatoire sur $\mathcal{C}$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$ et dont les cofibrations sont les éléments de* Cof *;*

b) *les conditions suivantes sont satisfaites :*

(S1) *la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du deux sur trois ;*
(S2) *on a l'inclusion $r(I) \subset \mathcal{W}$;*
(S3) *la classe $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ est stable par image directe et composition transfinie ;*
(S4) *la classe de flèches $\mathcal{W}$ est accessible.*

Démonstration. — Voir par exemple le corollaire A.2.6.6 et la proposition A.2.6.8 de [**12**] (en tenant compte du fait qu'une classe de flèches accessible est stable par rétractes). Pour l'implication *b)* $\Rightarrow$ *a)*, voir également [**15**]. □

Corollaire 2.11. — *Un A-localisateur est accessible au sens de Cisinski si et seulement s'il est accessible en tant que classe de flèches de $\widehat{A}$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{W}$ un A-localisateur. Fixons I un modèle cellulaire de $\widehat{A}$ au sens de Cisinski, c'est-à-dire un ensemble I tel que $lr(I)$ soit la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$. Un tel ensemble existe toujours en vertu par exemple de la proposition 1.2.27 de [**7**]. Il résulte alors du théorème de Smith appliqué à $\mathcal{W}$ et I et du théorème 2.4 de Cisinski appliqué à $\mathcal{W}$ que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) la classe de flèches $\mathcal{W}$ est accessible ;
b) il existe une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}$ dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences et dont les cofibrations sont les monomorphismes ;
c) le localisateur $\mathcal{W}$ est accessible au sens de Cisinski,

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 2.12. — *La trijection de Chiche-Cisinski préserve l'accessibilité au sens des classes de flèches (définition 2.9).*

Démonstration. — Les catégories $\widehat{\Delta}$, $\mathcal{C}at$ et $2\text{-}\mathcal{C}at$ étant accessibles, tout adjoint à gauche ou à droite entre ces catégories est accessible (voir la proposition 2.23 de [**1**]). On en déduit que les foncteurs N, i_Δ, ι et N_2 sont accessibles. Le résultat est alors conséquence du fait que l'image réciproque d'une classe de flèches accessible par un foncteur accessible est accessible (voir la remarque 2.50 de *op. cit.*). □

Corollaire 2.13. — *Un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de $2\text{-}\mathcal{C}at$) est accessible au sens de Cisinski si et seulement s'il est accessible en tant que classe de flèches de $\mathcal{C}at$ (resp. de $2\text{-}\mathcal{C}at$).*

Démonstration. — La trijection de Chiche-Cisinski préservant l'accessibilité au sens de Cisinski et l'accessibilité en tant que classe de flèches, le résultat est conséquence immédiate du fait que ces deux notions coïncident pour les Δ-localisateurs (corollaire 2.11). □

2.14. — Les deux notions d'accessibilité coïncidant, nous parlerons maintenant simplement de A-localisateurs (resp. de localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, resp. de localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$) *accessibles.*

Remarque 2.15. — Il résulte de la proposition 1.4.28 de [**7**] (resp. de la proposition 2.4.12 de [**13**], resp. de notre future proposition 4.5) que tout A-localisateur (resp. tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, resp. tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$) est stable par limite inductive suffisamment filtrante. En vertu du théorème 6.17 de [**1**], l'axiome de grands cardinaux appelé « principe de Vopěnka » implique donc que tout A-localisateur (resp. tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, resp. tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$) est accessible.

3. La structure à la Thomason « classique » sur 2-$\mathcal{C}at$

3.1. — On notera $\mathcal{W}_\infty$ la classe des 2-foncteurs (stricts) qui sont envoyés sur des équivalences d'homotopie faibles simpliciales par le foncteur $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$. (Cette classe est notée $\mathcal{W}^2_\infty$ dans l'introduction du présent article et dans [**5**].) On appellera $\mathcal{W}_\infty$*-équivalences* ses éléments, conformément à la terminologie introduite dans la définition 1.10.

3.2. — On appellera *structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen* la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$, introduite par Quillen dans [**14**], dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles et dont les cofibrations sont les monomorphismes. On rappelle que cette structure de catégorie de modèles est combinatoire et propre (voir par exemple le théorème 2.1.42 de [**7**]), et qu'un ensemble de générateurs pour les cofibrations est donné par

$$I = \{i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n \mid n \geq 0\},$$

où $\partial\Delta_n$ désigne le bord du n-simplexe Δ_n dans $\widehat{\Delta}$ et $i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$ l'inclusion canonique.

3.3. — On rappelle (voir [**11**]) qu'on a une adjonction

$$Sd : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \widehat{\Delta} : Ex,$$

où Sd est le foncteur de subdivision barycentrique et Ex est le foncteur de Kan, et des transformations naturelles

$$\alpha : Sd \to 1_{\widehat{\Delta}}, \quad \beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex,$$

transposées l'une de l'autre, qui sont des équivalences d'homotopie faibles argument par argument.

3.4. — Enfin, on rappelle que le foncteur $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ admet un adjoint à gauche, qu'on notera $c_2 : \widehat{\Delta} \to 2\text{-}\mathcal{C}at$ (voir par exemple le paragraphe 5.10 de [**2**]).

Définition 3.5. — Une *cofibration de Thomason de* 2-$\mathcal{C}at$ est un 2-foncteur élément de la classe $l r(c_2 Sd^2(I))$.

Théorème 3.6 **(Ara-Maltsiniotis).** — *La catégorie* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre dont les équivalences faibles sont les* $\mathcal{W}_\infty$*-équivalences et dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason.*

Démonstration. — C'est une partie du théorème 6.27 de [**2**]. □

On appellera *structure de catégorie de modèles à la Thomason sur* $2\text{-}\mathcal{C}at$ la structure donnée par le théorème précédent.

Théorème 3.7 **(Ara-Chiche-Maltsiniotis).** — *Le couple de foncteurs adjoints*

$$c_2 Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2 N_2$$

est une équivalence de Quillen, où $2\text{-}\mathcal{C}at$ *est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason et* $\widehat{\Delta}$ *de la structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen.*

Démonstration. — C'est le corollaire 6.32 de [**2**]. □

Remarque 3.8. — Le résultat précédent est partiellement attribué à Chiche car il dépend de manière essentielle du théorème 7.9 de [**4**].

Corollaire 3.9. — *On a les inclusions*

$$c_2 Sd^2(\mathsf{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_\infty \quad \textit{et} \quad Ex^2 N_2(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathsf{W}_\infty,$$

où W_∞ *désigne la classe des équivalences d'homotopie faibles simpliciales. De plus, les morphismes d'adjonction*

$$c_2 Sd^2 Ex^2 N_2 \to 1_{2\text{-}\mathcal{C}at} \quad \textit{et} \quad 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex^2 N_2 c_2 Sd^2$$

sont respectivement une $\mathcal{W}_\infty$*-équivalence naturelle et une équivalence d'homotopie faible simpliciale naturelle.*

Démonstration. — Puisque tous les objets de la structure de Kan-Quillen sont cofibrants, le foncteur de Quillen à gauche $c_2 Sd^2$ respecte les équivalences faibles (pour les structures de catégorie de modèles du théorème précédent). Le foncteur N_2 respectant les équivalences faibles par définition, il en est de même du foncteur $Ex^2 N_2$ en vertu de l'existence de l'équivalence faible naturelle $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex$ du paragraphe 3.3. Puisque $(c_2 Sd^2, Ex^2 N_2)$ est une équivalence de Quillen donnée par des foncteurs qui respectent les équivalences faibles, l'unité et la coünité de cette adjonction sont des équivalences faibles naturelles, ce qu'il fallait démontrer. □

4. Structures à la Thomason et localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$

4.1. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on notera $\mathcal{W}_\Delta$ le Δ-localisateur associé dans la trijection de Chiche-Cisinski (voir le paragraphe 2.8). Ce Δ-localisateur est caractérisé par le fait qu'il contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et par l'égalité

$$\mathcal{W} = N_2^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Il résulte de l'existence de l'équivalence faible naturelle $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex$ du paragraphe 3.3 qu'on a également

$$\mathcal{W} = N_2^{-1}(Ex^2)^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Par ailleurs, le théorème 6.37 de [**5**] donne l'inclusion $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$ qui jouera un rôle important dans ce qui suit.

Nous utiliserons dans cette section le lemme de transfert classique suivant :

Lemme 4.2. — *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles à engendrement cofibrant (au sens de la définition 11.1.1 de* [**10**]*) engendrée par I et J, $\mathcal{N}$ une catégorie complète et cocomplète, et*

$$F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : G$$

un couple de foncteurs adjoints. Notons $\mathcal{W}$ et Fib les classes des équivalences faibles et des fibrations de $\mathcal{M}$ respectivement. On suppose les conditions suivantes satisfaites :

a) *$F(I)$ et $F(J)$ permettent l'argument du petit objet (au sens de la définition 10.5.15 de* [**10**]*) ;*

b) *on a l'inclusion $G(lr(F(J))) \subset \mathcal{W}$.*

Alors $F(I)$ et $F(J)$ engendrent une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{M}$ dont les classes des équivalences faibles et des fibrations sont données par $G^{-1}(\mathcal{W})$ et $G^{-1}(\mathsf{Fib})$ respectivement. En particulier, pour cette structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{N}$, l'adjonction (F, G) est une adjonction de Quillen.

Démonstration. — Voir par exemple le théorème 11.3.2 de [**10**], la description des fibrations résultant des égalités $r(lr(F(J)) = r(F(J)) = G^{-1}(r(J)) = G^{-1}(\mathsf{Fib})$. $\square$

On vérifie facilement qu'un foncteur de Quillen à gauche qui respecte les équivalences faibles respecte également les carrés homotopiquement cocartésiens et que, si un tel foncteur est de plus une équivalence de Quillen à gauche, alors il reflète les carrés homotopiquement cocartésiens. Nous aurons besoin de l'énoncé analogue pour les *équivalences* de Quillen à *droite*, énoncé sans doute bien connu mais pour lequel nous n'avons pas réussi à trouver de référence dans la littérature.

Lemme 4.3. — *Soit F une équivalence de Quillen à droite entre deux catégories de modèles. On suppose que F préserve les équivalences faibles. Alors F préserve et reflète les carrés homotopiquement cocartésiens.*

Démonstration. — Notons $\square$ la catégorie $\Delta_1 \times \Delta_1$ (de sorte que si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{C})$ est la catégorie des carrés commutatifs dans $\mathcal{C}$), $\ulcorner$ la sous-catégorie pleine de $\square$ contenant tous les objets de $\square$ excepté $(1, 1)$, et $i : \ulcorner \to \square$ le foncteur d'inclusion canonique. On rappelle que si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles, un carré commutatif de $\mathcal{M}$ vu comme un objet X de $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})$ est homotopiquement cocartésien si et seulement si, pour tout objet Y de $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})$, l'application canonique

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner, \mathcal{M})}(i^*X, i^*Y)$$

induit une bijection

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square,\mathcal{M}))}(X,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner,\mathcal{M}))}(i^*X,i^*Y),$$

où Ho désigne le passage à la catégorie homotopique pour les équivalences faibles argument par argument.

Soit maintenant $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une équivalence de Quillen à droite préservant les équivalences faibles. Puisque le foncteur F préserve les équivalences faibles, il induit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square,\mathcal{M})) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "F_*"'] & \mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner,\mathcal{M})) \arrow[d, "F_*"] \\
\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square,\mathcal{N})) \arrow[r, "i^*"'] & \mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner,\mathcal{N}))
\end{tikzcd} .$$

Puisque les catégories $\ulcorner$ et $\square$ sont des catégories de Reedy, il résulte du fait que F est une équivalence de Quillen et de la théorie des structures de catégorie de modèles de Reedy (voir par exemple la proposition 15.4.1 de [**10**]) que les foncteurs verticaux du carré commutatif ci-dessus sont des équivalences de catégories. Le résultat suit immédiatement. □

Revenons à nos localisateurs.

Lemme 4.4. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. On a les inclusions*

$$c_2Sd^2(\mathcal{W}_\Delta) \subset \mathcal{W} \quad et \quad Ex^2N_2(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_\Delta.$$

Démonstration. — La seconde inclusion résulte du paragraphe 4.1. Montrons la première. Puisque $\mathcal{W}_\Delta$ contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales, le corollaire 3.9 entraîne que f est une $\mathcal{W}_\Delta$-équivalence si et seulement si $Ex^2N_2c_2Sd^2(f)$ en est une, c'est-à-dire si et seulement si $c_2Sd^2(f)$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 4.5. — *Tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ est stable par limite inductive filtrante.*

Démonstration. — La proposition résulte de l'énoncé analogue pour les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (voir la proposition 2.4.12 de [**13**]), de la correspondance donnée par le théorème 2.6 entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et ceux de 2-$\mathcal{C}at$, et du fait que les foncteurs N_2 et i_Δ commutent aux limites inductives filtrantes (le premier en vertu par exemple de la proposition 5.13 de [**2**] et le second car il admet un adjoint à droite). □

Théorème 4.6. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ accessible. La catégorie 2-$\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason de 2-$\mathcal{C}at$ et dont les fibrations sont les 2-foncteurs u tels* *que $Ex^2N_2(u)$ est une fibration de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.*

Démonstration. — Nous allons appliquer le lemme 4.2 à l'adjonction

$$c_2Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2N_2,$$

où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. Soit J un ensemble engendrant les cofibrations triviales de cette structure. Puisque la catégorie 2-$\mathcal{C}at$ est localement présentable, il suffit de vérifier qu'on a l'inclusion

$$N_2Ex^2(lr(c_2Sd^2(J))) \subset \mathcal{W}_\Delta,$$

ou encore, en vertu du paragraphe 4.1, qu'on a l'inclusion

$$lr(c_2Sd^2(J)) \subset \mathcal{W}.$$

Le lemme 4.4 entraîne que la classe $c_2Sd^2(J)$ est incluse dans $\mathcal{W}$ et le théorème 3.7 que cette même classe est incluse dans la classe Cof des cofibrations de Thomason de 2-$\mathcal{C}at$. Pour conclure, en vertu de l'argument du petit objet, il suffit donc de montrer que $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ est stable par rétractes, composition transfinie et image directe. La stabilité par rétractes est immédiate et celle par composition transfinie résulte de la proposition 4.5. Montrons la stabilité par image directe.

Considérons un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "i'"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd}$$

de 2-$\mathcal{C}at$ où i est une cofibration de Thomason de 2-$\mathcal{C}at$. Par propreté à gauche de la structure à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ (voir le théorème 3.6), ce carré est homotopiquement cocartésien pour cette même structure. En vertu du théorème 3.7 et de son corollaire 3.9, le foncteur Ex^2N_2 est une équivalence de Quillen à droite respectant les équivalences faibles (pour les structures de catégorie de modèles du théorème invoqué). La proposition 4.3 entraîne donc que le carré

$$\begin{tikzcd} Ex^2N_2(A) \arrow[r, "Ex^2N_2(u)"] \arrow[d, "Ex^2N_2(i)"'] & Ex^2N_2(C) \arrow[d, "Ex^2N_2(i')"] \\ Ex^2N_2(B) \arrow[r, "Ex^2N_2(v)"'] & Ex^2N_2(D) \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cocartésien pour la structure de Kan-Quillen. (On pourrait se débarrasser des Ex^2 en utilisant l'équivalence faible naturelle β du paragraphe 3.3.) Il résulte du fait que $\mathcal{W}_\Delta$ contient les équivalences d'homotopie faibles (et que les deux structures de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ en jeu ont mêmes cofibrations) que ce carré est également homotopiquement cocartésien pour la structure de catégorie de modèles associée à $\mathcal{W}_\Delta$.

Si maintenant i est de plus une $\mathcal{W}$-équivalence, alors $Ex^2N_2(i)$ est une $\mathcal{W}_\Delta$-équivalence et il en est donc de même de $Ex^2N_2(i')$, ce qui prouve que i' est une $\mathcal{W}$-équivalence et achève de vérifier la stabilité de $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ par image directe.

La propreté à gauche s'obtient en remplaçant i par u et i' par v dans l'argument du paragraphe précédent. $\square$

Remarque 4.7. — Il résulte de la preuve du théorème précédent que la structure de catégorie de modèles obtenue est à engendrement cofibrant engendrée par $c_2Sd^2(I)$ et $c_2Sd^2(J)$, où I est l'ensemble du paragraphe 3.2 et J est un ensemble engendrant les cofibrations triviales de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.

On appellera la structure de catégorie de modèles sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à $\mathcal{W}$.*

Théorème 4.8. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ accessible. Le couple de foncteurs adjoints*

$$c_2Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2N_2$$

est une équivalence de Quillen, où $2\text{-}\mathcal{C}at$ est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à $\mathcal{W}$ et $\widehat{\Delta}$ de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.

Démonstration. — Le foncteur c_2Sd^2 préserve les cofibrations par définition et les équivalences faibles par le lemme 4.4. Le couple de foncteurs (c_2Sd^2, Ex^2N_2) est donc une adjonction de Quillen (cela résulte également de la preuve du théorème 4.6). Puisque le foncteur Ex^2N_2 préserve également les équivalences faibles, pour montrer que cette adjonction de Quillen est une équivalence de Quillen, il suffit de vérifier que l'unité et la coünité de l'adjonction sont des équivalences faibles naturelles. Cela résulte immédiatement du corollaire 3.9 et de la minimalité de $\mathcal{W}_\infty$. $\square$

Le degré de généralité naturel des arguments prouvant les théorèmes 4.6 et 4.8 est donné dans lemme que nous allons maintenant énoncer. L'ordre bourbachique aurait voulu qu'on commence par démontrer ce lemme et qu'on en déduise ces deux résultats (modulo la trijection de Chiche-Cisinski) en l'appliquant à l'équivalence de Quillen du théorème 3.7 et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. Nous y avons renoncé pour des raisons d'exposition.

Lemme 4.9. — *Soient*

$$F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : G$$

une équivalence de Quillen et $\mathcal{M}'$ une catégorie de modèles à engendrement cofibrant engendrée par I' et J' avec même catégorie sous-jacente que $\mathcal{M}$, mêmes cofibrations *et $\mathcal{W}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}'}$, où $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{W}_{M'}$ désignent les classes des équivalences faibles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement. On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

a) *on a $G(\mathcal{W}_{\mathcal{N}}) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$, où $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$ désigne la classe des équivalences faibles de $\mathcal{N}$;*

b) *les sources et buts des flèches de J' sont cofibrants dans $\mathcal{M}$;*

c) *la catégorie de modèles $\mathcal{N}$ est propre à gauche ;*

d) *la classe $G^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}'})$ est stable par limite inductive filtrante.*

Alors $F(I')$ et $F(J')$ engendrent une structure de catégorie de modèles propre à gauche $\mathcal{N}'$ sur la catégorie sous-jacente à $\mathcal{N}$ dont les classes des équivalences faibles et des fibrations sont données par $G^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}'})$ et $G^{-1}(\mathsf{Fib}_{\mathcal{M}'})$ respectivement, où $\mathsf{Fib}_{\mathcal{M}'}$ désigne la classe des fibrations de $\mathcal{M}'$. De plus, l'adjonction (F, G) induit une équivalence de Quillen

$$F : \mathcal{M}' \rightleftarrows \mathcal{N}' : G.$$

Démonstration. — La preuve est une adaptation immédiate des preuves des théorèmes 4.6 et 4.8. □

5. Équivalences de Quillen avec $\mathcal{C}at$

5.1. — Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, on notera $\mathcal{W}_\Delta$ le Δ-localisateur associé dans la bijection donnée par le théorème 2.5. Ce Δ-localisateur est caractérisé par le fait qu'il contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et par l'égalité

$$\mathcal{W} = N^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Comme dans le cas 2-catégorique, on a également

$$\mathcal{W} = N^{-1}(Ex^2)^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Notons que si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, la trijection de Chiche-Cisinski donne l'égalité $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at)_\Delta = \mathcal{W}_\Delta$.

Définition 5.2. — Une *cofibration de Thomason de $\mathcal{C}at$* est un élément de la classe $lr(c\,Sd^2(I))$, où $c : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur nerf N.

***Théorème 5.3* (Cisinski).** — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ accessible. La catégorie $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason de $\mathcal{C}at$ et dont les fibrations sont les foncteurs u tels que $Ex^2N(u)$ est une fibration de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.*

Démonstration. — Cela résulte de la preuve du théorème 5.2.15 de [**7**], la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ en jeu y étant obtenue en appliquant le lemme de transfert à l'adjonction $c\,Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathcal{C}at : Ex^2N$, où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. □

Remarque 5.4. — Il résulte également de la preuve du théorème 5.2.15 de [**7**] que l'adjonction $c\,Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathcal{C}at : Ex^2N$ est une équivalence de Quillen, où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée à $\mathcal{W}_\Delta$.

Remarque 5.5. — Le théorème 5.3 et la remarque 5.4 résultent également du lemme 4.9 appliqué à l'équivalence de Quillen définie par Thomason dans [**16**] et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ (en utilisant la bijection de Cisinski du théorème 2.5).

On appellera la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à* $\mathcal{W}$.

Théorème 5.6. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ accessible. Alors l'adjonction*

$$\tau : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightleftarrows \mathcal{C}at : \iota,$$

où τ désigne l'adjoint à gauche du foncteur ι, est une équivalence de Quillen, où 2-$\mathcal{C}at$ (resp. $\mathcal{C}at$) est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à $\mathcal{W}$ (resp. à $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$).

Démonstration. — Les équivalences faibles et les fibrations de ces deux structures sont précisément les morphismes s'envoyant, *via* les foncteurs Ex^2N_2 et Ex^2N respectivement, sur des équivalences faibles et des fibrations de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ (voir les théorèmes 4.6 et 5.3 pour les fibrations). Il résulte ainsi immédiatement de l'isomorphisme $N_2\iota \simeq N$ que le foncteur ι préserve les équivalences faibles et les fibrations, et donc que le couple (τ, ι) forme une adjonction de Quillen.

Puisque le foncteur ι préserve les équivalences faibles, pour conclure, il suffit de voir que ι induit une équivalence sur les catégories homotopiques. Cela résulte du théorème 6.33 de [**5**]. $\square$

Remarque 5.7. — On pourrait également déduire le théorème précédent d'une version « fonctorielle » du lemme 4.9 qu'on appliquerait au triangle d'équivalences de Quillen

$$\begin{tikzcd} & \Delta \arrow[dl, "c\,Sd^2"'] \arrow[dr, "c_2Sd^2"] & \\ 2\text{-}\mathcal{C}at \arrow[rr, "\tau"'] & & \mathcal{C}at \end{tikzcd} ,$$

où Δ (resp. $\mathcal{C}at$, resp. 2-$\mathcal{C}at$) est munie de la structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen (resp. de Thomason [**16**], resp. du théorème 3.6), et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.

6. Propreté à droite

Définition 6.1. — Soit C une classe de petites catégories (resp. de petites 2-catégories). On appellera *localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$* (resp. *de* 2-$\mathcal{C}at$) *engendré par* C le localisateur fondamental engendré par la classe de flèches $\{C \to e \mid C \in \mathsf{C}\}$, où e désigne la catégorie finale.

***Théorème 6.2* (Cisinski).** — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ associée à $\mathcal{W}$ est propre ;*
b) *la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à $\mathcal{W}_\Delta$ est propre ;*
c) *$\mathcal{W}$ est engendré par un* ensemble *de catégories.*

Démonstration. — Dans [**7**], Cisinski définit une notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ propre (définition 4.3.21). Il résulte du théorème 4.3.24 de *op. cit.* et de la proposition 1.5.13 de [**13**] qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}at$ est propre si et seulement s'il satisfait à la condition *b)* ci-dessus. Les équivalences avec les deux autres conditions résultent alors des théorèmes 5.2.15 et 6.1.11 de [**7**]. □

Lemme 6.3. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de* 2-$\mathcal{C}at$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\mathcal{W}$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites* 2*-catégories ;*
b) *$\mathcal{W}$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites catégories ;*
c) *le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites catégories.*

Démonstration. — Si $\mathcal{W}$ est engendré par une classe C de petites 2-catégories, alors, en vertu de la proposition 6.47 de [**5**], le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par la classe de foncteurs $\{i_\Delta N_2(C) \to i_\Delta N_2(e) \mid C \in \mathsf{C}\}$. Puisque $i_\Delta N_2(e) \simeq \Delta$ admet un objet final, par définition des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, le foncteur $i_\Delta N_2(e) \to e$ est dans $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$. Par deux sur trois, le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ est donc engendré par la classe de petites catégories

$$\{i_\Delta N_2(C) \mid C \in \mathsf{C}\}.$$

Par ailleurs, il résulte de la proposition 6.48 de [**5**] que si le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ est engendré par une classe de petites catégories, le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est également engendré par cette classe de petites catégories, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 6.4. — *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de* 2-$\mathcal{C}at$ *accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur* 2-$\mathcal{C}at$ *associée à $\mathcal{W}$ est propre ;*

b) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ associée au localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est propre ;*
c) *la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ est propre ;*
d) *$\mathcal{W}$ est engendré par un* ensemble *de petites* 2*-catégories ;*
e) *$\mathcal{W}$ est engendré par un* ensemble *de petites catégories.*

Démonstration. — L'équivalence entre les quatre dernières conditions résulte du théorème 6.2 et du lemme précédent. Les implications *c)* $\Rightarrow$ *a)* $\Rightarrow$ *b)* résultent du fait que les foncteurs

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\iota} 2\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{Ex^2 N_2} \widehat{\Delta}$$

sont des foncteurs de Quillen à droite (voir les théorèmes 5.6 et 4.8) qui préservent et reflètent les équivalences faibles. □

Références

[1] J. Adámek & J. Rosický – *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] D. Ara & G. Maltsiniotis – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n-catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.

[3] J. Chiche – « La théorie de l'homotopie des 2-catégories », Thèse, Université Paris 7, 2014, sous la direction de G. Maltsiniotis.

[4] ______, « Un théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015), p. 49–85.

[5] ______, « Théories homotopiques des 2-catégories », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 1.

[6] D.-C. Cisinski – « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.

[7] ______, « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.

[8] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan & J. H. Smith – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[9] A. Grothendieck – « Pursuing stacks », Manuscript, 1983, édité par G. Maltsiniotis et B. Toën, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[10] P. S. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.

[11] D. M. Kan – « On c.s.s. complexes », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 449–476.

[12] J. Lurie – *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

[13] G. Maltsiniotis – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.

[14] D. G. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[15] J. Rosický – « On combinatorial model categories », *Appl. Categ. Structures* **17** (2009), no. 3, p. 303–316.

[16] R. W. Thomason – « Cat as a closed model category », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.

[17] K. Worytkiewicz, K. Hess, P. E. Parent & A. Tonks – « A model structure à la Thomason on 2-Cat », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 1, p. 205–236.

Dimitri Ara, Radboud Universiteit Nijmegen, Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics, Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nijmegen, The Netherlands
E-mail : `d.ara@math.ru.nl` • *Url :* `http://www.math.ru.nl/~dara/`