Toeval is logisch

Van Huygens tot Freudenthal

Nederland heeft twee grote denkers op het gebied van de kansrekening voortgebracht. In zijn kleine boekje *Van rekeningh in spelen van geluck* uit 1657 formuleerde Christiaan Huygens als eerste de wiskundige principes van het dobbelen en aanverwante gokspelen; zijn axiomatische opbouw is opvallend, ook voor zijn tijd (Vermij, 2004). Hoewel Johan Cruijff niet primair als wiskundige de geschiedenis in zal gaan, is hij verantwoordelijk voor een cruciaal inzicht over waarschijnlijkheid: *Toeval is logisch* (Baartse, 2007).

Geheel volgens deze grote Nederlandse traditie werd de kansrekening op het vwo aan de auteur (eindexamen 1981) gedoceerd uit het boek van Nijdam et al. (1975), dat was gebaseerd op een eerdere versie van Freudenthal, Nijdam en Wouters. Tranen van ontroering en jeugdsentiment springen mij in de ogen als ik dit boek 26 jaar later weer doorblader en vaststelt hoe fraai en leerzaam het kansbegrip daar op logisch-axiomatische basis werd ingevoerd, en hoe dartel de auteurs heen en weer sprongen van strenge deductie naar speelse toepassing! Mijn liefde voor toeval en kans heeft haar basis in dit boek; overal in de natuur en het menselijk bestaan zie ik sindsdien kansfuncties en kansaxioma's in actie - behalve in de kwantummechanica! (Landsman, 2006).

Mijn huidige studenten daarentegen genoten 'realistisch' wiskundeonderwijs en zagen tussen de honderden pagina's met verhaaltjessommen over klassenfeesten en dergelijke, afgewisseld door wanhopige pogingen tot theorievorming rond onzinnige begrippen als 'weetkansen' en 'zweetkansen', door de bomen het bos niet meer en kregen zo een steeds grotere hekel aan de kansrekening. Waarom niet ook aan de rest van de wiskunde? Dat laat zich verklaren door de speciale status van de kansrekening binnen de wiskunde, die, zoals ik zo dadelijk uitvoeriger zal uitleggen, een logische aanpak van veel groter belang maakt dan bij enig ander onderdeel van de wiskunde. De kansrekening is namelijk als wiskunde *niet te begrijpen* zonder een axiomatische en conceptuele onderbouwing, iets dat voor vakken als algebra, analyse en meetkunde niet (op de middelbare school) of in veel mindere mate (op de universiteit) geldt.

Is kansrekening wel wiskunde?

De kansrekening is een vreemde eend in de bijt van de wiskunde (Nepveu & Krijn, 2006). Veel wiskundigen hebben er een hekel aan en beschouwen het niet eens als wiskunde. Want hoe zien zowel niet-wiskundigen als wiskundigen de wiskunde in het algemeen? Ik ben niet de eerste die het volgende citaat (van een inmiddels beroemd autistisch romanpersonage) gebruik, maar het is uiterst treffend:

"Meneer Jeavons zei dat ik van wiskunde hield omdat het veilig was. Hij zei dat ik van wiskunde hield omdat ik dan problemen kon oplossen, en die problemen waren moeilijk en interessant, maar er kwam wel altijd een duidelijk antwoord uit. En wat hij bedoelde was dat wiskunde anders was dan het leven, want in het leven komen er geen duidelijke antwoorden uit." (Haddon, 2004).

En, zo denken velen, ook in de kansrekening komen er geen duidelijke antwoorden uit en daarom is het geen wiskunde (maar, volgens meneer Jeavons, "leven"): de zekerheid die eigen is aan het woord wiskunde ontbreekt. Weliswaar levert de kansrekening getallen op (en kent zij zelfs stellingen), maar de *betekenis* van die getallen is vaak onduidelijk. Correct is echter: de betekenis van kansen wordt in het voortgezet noch het hoger onderwijs afdoende duidelijk gemaakt. Als dit wel zou gebeuren, zou het duidelijk worden dat de kansrekening de onzekerheden van het leven verbindt met de zekerheid van de wiskunde en zo een brugfunctie vervult tussen wiskundige praktijk en theorie die de analyse in dat opzicht overtreft (om maar te zwijgen van de algebra en de meetkunde). Inderdaad, in de moderne wetenschap wordt toeval niet meer zoals door St Augustinus gezien als storend tekenen van onvolmaaktheid maar als een drijvende kracht, verantwoordelijk voor het ontstaan van diersoorten, menselijke gedachten, beurscrashes en zelfs het heelal (Mainzer, 2007). Meer in het algemeen kan ik vrijwel geen maatschappelijk proces of studie bedenken waarin de kansrekening geen rol speelt, van Rechten (Sjerps, 2004; Derksen, 2006) tot Geneeskunde (Gigerenzer & Edwards, 2003); interessant daarbij is overigens dat naast (en dikwijls in tegenspraak met) *logische* ook *psychologische* aspecten van kansen een rol spelen.

Mijn opvatting is dat de kansrekening voor een grote groep leerlingen op (in ieder geval) het vwo niet alleen begrijpelijker maar ook leuker en uitdagender zou worden als ten eerste de *logisch-axiomatische grondslag* terugkeert in het onderwijs en ten tweede deze wordt aangevuld met de behandeling van de verschillende *interpretaties* van de kansrekening (Fine, 1973; von Plato, 1994; Gillies, 2000; Mellor, 2005; Nepveu & Krijn, 2006). Op dit laatste gebied schieten zelfs Nijdam et al. (1975) tekort, evenals de strenge Duitsers (Kütting, 1981). Ik doel hiermee op het feit dat de axioma's van de kansrekening niet eenduidig voorschrijven wat een kans nu eigenlijk is. In schoolboeken wordt de nadruk gelegd op de traditionele interpretatie van kansen in termen van relatieve frequenties, maar hoewel deze duiding ook in de wetenschap populair is, zijn hier zowel voor eindige als oneindige series kansexperimenten allerlei bezwaren tegen aan te voeren. Om die reden is in de eerste helft van de twintigste eeuw een subjectief kansbegrip ontwikkeld, dat in zekere zin teruggrijpt op het werk van Bayes (1702-1761) en ook op éénmalige gebeurtenissen van toepassing is. Ik zal hier in het kader van het driedeurenprobleem straks nog nader op in gaan, maar wil nu slechts opmerken dat het juiste gebruik van de kansrekening zeer gebaat zou zijn bij deze combinatie van axiomatiek en interpretaties, geïllustreerd uiteraard door spectaculaire toepassingen in maatschappij en wetenschap.

Kansrekening in wiskunde B of D?

Zoals iedere lezer van dit blad weet bevatten wiskunde A1, A12, B1 en B12 in de huidige situatie hetzelfde pakket *Combinatoriek en kansrekening* (en bovendien een onderdeel *Statistiek*, dat iets verschilt tussen A en B). Het lesmateriaal is in feite afkomstig uit wiskunde A12, met nadruk op het berekenen (of destilleren uit verhalende opgaven) van numerieke kansen met behulp van veelal combinatorische recepten. Zoals gezegd komt het logisch en conceptueel nadenken over kansen zelfs in het vwo niet of nauwelijks aan bod. Nog afgezien van het gebrek aan wiskundige diepgang is de precieze betekenis van kansen daardoor vaak onduidelijk, terwijl deze betekenis zowel wiskundig als maatschappelijk uiterst belangrijk is.

Van de vier vakken wiskunde A, B, C, D die per augustus 2007 in plaats komen van A1, A12, B1 en B12 bevatten A en C ieder op papier het huidige programma voor kansrekening en statistiek van 200 slu, terwijl dit onderdeel geheel uit wiskunde B is verdwenen. In wiskunde D is daarentegen 160 slu gereserveerd voor kansrekening en statistiek. Het bovengenoemde kwaliteitsprobleem wordt door deze verhuizing van B naar D nog ernstiger: het nu beschikbare materiaal doet o.i. geen recht aan de ambitieuze opzet en doelgroep van dit vak. Nog afgezien van de specifieke invulling lijkt de eliminatie van kansrekening en statistiek uit wiskunde B onbegrijpelijk in het licht van het enorme belang van dit vak voor alle exacte vervolgstudies, om nog maar te zwijgen van de maatschappelijke relevantie en de mogelijkheid goed te leren nadenken over het moderne wereldbeeld. Insiders noemen een aantal argumenten voor de beslissing om kansrekening en statistiek uit wiskunde B te halen: het aantal uren en daarmee het aantal onderwerpen moest worden gereduceerd (van 760 tot 600), overlap tussen A en B moest zo veel mogelijk worden vermeden, en ten slotte zou de invoering van wiskunde D gebaat zijn bij de opname van kansrekening en statistiek in dat vak, omdat het scholen juist vanwege het grote belang ervan min of meer zou verplichten wiskunde D ook daadwerkelijk aan te bieden.

De Resonansgroep wiskunde toonde zich niet onder de indruk van deze argumenten: in haar *Standpunt ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later* stelt zij voor om kansrekening en statistiek weer terug te brengen in het examenprogamma voor wiskunde B en de voor dit voorstel benodigde ruimte te vinden door het schrappen van het onderdeel Voortgezette meetkunde. (Zie www.resonansgroepwiskunde.nl/. Voor de goede orde: de auteur is lid van de Resonansgroep.) Dit voorstel werd echter niet door minister Van der Hoeven overgenomen, zodat het tenminste gedurende de komende vijf jaar dus zo zal zijn dat havo/vwo-leerlingen in het NT-profiel die (verplicht) het profielvak wiskunde B maar niet het profielkeuzevak D kiezen zonder enige noemenswaardige kennis van kans en statistiek het hoger onderwijs of de maatschappij ingaan.

In haar *Beantwoording vragen en opmerkingen [van] enkele fracties inzake de examenprogramma's wiskunde havo en vwo per 1 augustus 2007* (VO/OK/073556) merkt de minister op dat zij het voorstel van de Resonansgroep om kansrekening en statistiek te ruilen voor voortgezette meetkunde niet heeft overgenomen op grond van "de kritische reactie van de lerarenvereniging". Dit is een verwijzing naar de zogenaamde *Bestuursreactie mbt Stanpunt Resonansgroep* (www.nvvw.nl/page.php?id=1776) waarin de voorzitster van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (tevens coauteur van de in het bewuste Standpunt bekritiseerde Syllabi Wiskunde B vwo en havo) het met de volgende woorden opneemt voor de vlakke meetkunde: "*Leerlingen leren daar zuiver logisch deductief redeneren, het verschil tussen argumenten en conclusies (de cirkelredenering), het verschil* *tussen axioma's en stellingen, het bewijs uit het ongerijmde, de logische omkering, dat het omgekeerde van een stelling niet altijd waar is, equivalente beweringen etc. En natuurlijk de belangrijke ervaring om met louter hersenactiviteit een verdere stap in het denken te zetten en onomstotelijk vast te stellen of iets waar is. Een wezenskenmerk van de wiskunde als toonbeeld van menselijk vernuft. De meetkunde heeft daarin al vele eeuwen haar waarde bewezen.*"

Iedereen met hart voor de wiskunde zal het met deze opmerkingen eens zijn, waarbij echter opvalt dat slechts de laatste zin relevant is voor de keuze van meetkunde i.p.v. kansrekening en statistiek in wiskunde B. Maar ofschoon ook deze laatste zin mijn instemming heeft, is de door de minister overgenomen conclusie van het Bestuur van de de NVvW dat de voortgezette meetkunde dan ook het aangewezen medium is om de axiomatisch-deductieve methode in de klas te brengen, een *non sequitur*. De voortgezette meetkunde (die voornamelijk bestaat uit Euclidische meetkunde) is niet alleen irrelevant voor de doorstroom naar vervolgstudies (inclusief overigens wiskunde), zoals de Resonansgroep opmerkt, maar levert m.i. tevens een niet geringe bijdrage aan het stoffige imago van de schoolwiskunde: waarom zouden wij onze leerlingen lastigvallen met 2500 jaar oude constructies die uiteindelijk zijn gemotiveerd door de landmeting en geen enkele indruk maken op kinderen die de wiskunde achter de technologische infrastructuur van onze moderne maatschappij willen begrijpen? Misschien nog wel ernstiger dan mijn indruk dat de stellingen van de Euclidische meetkunde de meeste scholieren helemaal niets interesseren, is trouwens het feit dat de axioma's allerminst eenvoudig zijn, zoals twee millennia van misverstanden over het parallellenpostulaat hebben aangetoond.

De juiste conclusie uit het argument in de *Bestuursreactie* is dan ook dat een onderdeel als *Oriëntatie op bewijzen* (i.e. het huidige subdomein Gb1) zonder meer in wiskunde B thuishoort, maar dat het beste medium daartoe nog bepaald moet worden. Mijn voorstel is om daar de kansrekening voor in te zetten. Uit Nijdam et al. (1975, p. 72) citeer ik de drie kansaxioma's (voor eindige kansexperimenten), waarbij ik door vallen en opstaan heb geleerd om ten behoeve van mijn scholieren de "verzameling van alle deelverzamelingen van de uitkomstenverzameling" te vervangen door de lijst van gebeurtenissen (waarbij een gebeurtenis een combinatie van mogelijke uitkomsten van een gegeven kansexperiment is), en de verzamelingstheoretische conjunctie en disjunctie door respectievelijk de woorden "en" en "of". Een eenvoudiger axiomastelsel is nauwelijks denkbaar:

"Een functie P, gedefinieerd op de lijst van gebeurtenissen van een gegeven kansexperiment is een kansfunctie als geldt:

> *eig. 1: P(U)=1 [waarbij U de zekere gebeurtenis is, i.e. de combinatie van alle moge lijke uitkomsten];*
>
> *eig. 2: $0 \leq P(A) \leq 1$ voor elke gebeurtenis A;*
>
> *eig. 3: P(A en B) = P(A) + P(B) wanneer A en B elkaar uitsluiten [i.e. als A of B de onmogelijke gebeurtenis is]."*

De *voorwaardelijke kans* is ten slotte vastgelegd door de "*algemene productregel*

P(A of B) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)."

Euclides zou er zijn vingers bij hebben afgelikt en minister Plasterk gaat dat nog doen.

Foto:
Dick van Aalst

Helaas pindakaas: zoals het er nu voorstaat krijgen slechts de bollebozen die wiskunde D gaan kiezen straks enige kennis van de kansrekening, en dat ook nog eens op het niveau van wiskunde A (de serie *getal & ruimte* doet hierbij nog een extra duit in het zakje door met één boek over Statistiek en kansrekenen voor wiskunde D op havo én vwo te komen).

Om hoeveel leerlingen gaat het? Uit de WiskundEbrief nr. 414 van 15 april 2007 (zie www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief/) citeren wij: *"Een duidelijke meerderheid van de scholen biedt wiskunde D aan. Op het havo ca. twee derde, op het vwo ca. 80%. Echter op veel scholen wordt het weinig gekozen (minder dan 10% van de leerlingen). Dit geldt met name op het havo. Slechts 20% van de scholen meldt een deelname van boven de 10 % (meestal 10-20%). Het vwo biedt een gunstiger beeld. Hier meldt ruim 40 % van de scholen een deelname van meer dan 10 %. Ook hier betekent meer dan 10% meestal 10-20 %. Een ruwe schatting van het percentage leerlingen (van de 3e klassen) dat(komend jaar) wiskunde D gaat volgen komt uit op ca 5 voor havo en ca. 10 voor vwo."*

Wat te doen? Lenin vroeg het zich al af. Mijn advies is om te proberen er nog het beste van te maken door de 160 slu die wiskunde D voor het domein Statistiek en Kansrekening omvat op te splitsen in 120 slu voor het wiskunde A materiaal (dat, zoals al vaak is opgemerkt, wiskunde D leerlingen vermoedelijk veel sneller kunnen doorwerken dan in de 200 slu die voor wiskunde A leerlingen is gereserveerd) en de resterende 40 slu te besteden aan een keuzeonderwerp waarin logisch en conceptueel denken over kansen een hoofdrol speel. Een aanzet daartoe is de concept lesbrief *Interpretaties van kansen, de Dutch Book stelling en het driedeurenprobleem* (Dekkers & Landsman, 2007). Ik geef hier nu een samenvatting van, analoog aan mijn voordrachten in het nascholingstraject *In zee met wiskunde D* dat de RU en de drie TU's het afgelopen jaar hebben aangeboden (www.wiskundedsteun.nl/). Voor het domein Wiskunde in Wetenschap hebben Mirte Dekkers en de auteur overigens de nauw met kansrekening verbonden module *Bestaat Toeval?* van 80 slu ontwikkeld; zie Dekkers & Landsman (2006) voor de concept lesbrief en Landsman (2006) voor een inleiding.

Het driedeurenprobleem

Wie kent het driedeurenprobleem niet? Al was het maar onder de alternatieve namen *Monty Hall Problem* (vernoemd naar de presentator van de spelshow *Let's make a deal* waarin de hieronder beschreven situatie zich daadwerkelijk voordeed), *Willem Ruis Probleem, Ziegenproblem* (waarbij het opmerkelijk is dat onze met auto's geobsedeerde oosterburen het niet over *das Autoproblem* hebben!), enzovoort. Het probleem kreeg grote bekendheid toen een Marilyn Savant Vos (volgens het *Guinness Book of Records* de intelligentste vrouw ter wereld) er in 1990 over schreef in haar column *Ask Marilyn* in het Amerikaanse tijdschrift *Parade Magazine*, waarin ze wekelijks wiskundevragen van lezers beantwoorde. Ofschoon het probleem toen in alle mogelijke herformuleringen al lang bekend was, is het sindsdien een klassieker uit de kansrekening waarover talloze artikelen en internetsites bestaan; Pfaltzgraff (2006) en Tijms (2002) besteden er bijvoorbeeld aandacht aan. Zie ook de leuke presentatie op kennislink door Van den Brandhof (2006).

Stel je bent beland in de finale van een spelshow en staat voor 3 gesloten deuren. Achter één van deze deuren staat de hoofdprijs: een prachtige splinternieuwe auto. Achter ieder van de andere twee deuren bevindt zich een geit. De quizmaster vraagt je één van de drie deuren te kiezen. Nadat jij je keuze gemaakt hebt, opent de quizmaster (die weet waar de auto staat) één van de overgebleven twee deuren. Achter de deur die de quizmaster opent zit een geit. Nu geeft de quizmaster je de keuze om alsnog van deur te wisselen. Wat moet je doen om de meeste kans te maken op de hoofdprijs: bij je oorspronkelijke keuze blijven of wisselen van deur?

Je inuïtie zegt waarschijnlijk dat het niet uitmaakt of je van deur wisselt: er zijn nog twee gesloten deuren en op het eerste gezicht lijkt het alsof voor elk van beide deuren de kans 1/2 is dat de hoofdprijs zich achter deze deur bevindt. Deze redenering blijkt echter niet juist te zijn: als je wisselt van deur verdubbel je je kans op de hoofdprijs: deze stijgt van 1/3 naar 2/3. Waarom? De kans dat je de meteen de deur met de hoofdprijs hebt gekozen is 1/3. De kans dat je een deur met een geit hebt gekozen is 2/3. Heb je een deur met een geit gekozen, dan levert wisselen van deur je uiteindelijk de hoofdprijs op. Omdat de kans dat je een deur met een geit gekozen 2/3 is, is de kans dat wisselen je de auto geeft dus ook 2/3.

Marilyn Savant Vos gaf deze correcte oplossing, maar zelfs na haar uitleg bleven de brieven van mensen die het tegendeel beweerden (onder wie vooraanstaande wetenschappers en wiskundigen) binnenstromen. Enkele reacties waren: *"Ik maak me grote zorgen over het gebrek aan wiskundig inzicht bij het grote publiek. Help alstublieft door uw fout toe te geven." "Ongelooflijk dat u uw fout nog steeds niet inziet nadat u door zeker drie wiskundigen (!) bent verbeterd." "U hebt het volledig mis... Hoeveel woedende wiskundigen zijn ervoor nodig om u te overtuigen?"* Ook in Nederland zorgde het probleem voor veel opwinding toen er in 1995 een artikel over verscheen in NRC Handelsblad. Ook deze krant kreeg massa's brieven binnen en beëindigde uiteindelijk de discussie met de woorden: *"Stop, stop, stop met brieven sturen. Het onbegrip tussen het gezond verstand en de wiskundigen is kennelijk onoverbrugbaar."*

Waarom blijft het probleem knagen? Waarom veroorzaakt een probleem dat zo eenvoudig te formuleren is en waarvan de oplossing in enkele regels is uit te leggen zoveel opwinding? Dit is omdat onze intuïtie misleid wordt. Van een *logische* redenering die tegen onze *psychologische* intuïtie indruist raken we namelijk in de war. Meestal geeft je intuïtie aan dat logische redeneringen kloppen als een bus, maar wat doe je als dat niet het geval is? Mijn suggestie om in dit geval de kloof tussen wiskunde en intuïtie te overbruggen is om naast de axiomatiek ook de interpretatie van het kansbegrip bij de uitleg te betrekken. Wat is een kans nu precies? Wat bedoelen we eigenlijk als we zeggen dat de kans op een bepaalde gebeurtenis 1/3 is?

Uiteraard is het driedeurenprobleem slechts een kapstok voor de axiomatiek en interpretatie van de kansrekening; anders dan de rechtszaak tegen Lucia de B., waarin eveneens ernstige misverstanden over kansen optraden (Derksen, 2006) heeft het probleem op zich geen enkel belang. Mijn hoop is natuurlijk dat leerlingen zich uitgaand van deze frivole situatie vragen gaan stellen, elkaar op het schoolplein of via MSN aanspreken en op een leuke manier na beginnen te denken over de betekenis van kansen en toeval.

Interpretaties van de kansrekening

Zoals reeds opgemerkt bestaan er verschillende interpretaties van het kansbegrip (Fine, 1973; von Plato, 1994; Gillies, 2000; Mellor, 2005; Nepveu & Krijn, 2006). Voor mijn doel is het voldoende om er twee te bespreken die diametraal tegenover elkaar staan; ze voldoen beide aan de eerder genoemde axioma's van de kansrekening.

In de *objectieve interpretatie* bestaat een kans 'echt' in de natuur. In deze interpretatie wordt een kans geïdentificeerd met een relatieve frequentie bij N herhalingen van een kansexperiment, dus $P(A) = \#(A)/N$, waarbij $\#(A)$ het aantal keren is dat de gebeurtenis A optreedt. Deze interpretatie is uiteraard alleen van toepassing op herhaalbare kansexperimenten, maar ook afgezien van deze beperking zijn er problemen mee. Voor eindige N ontstaan soms grote afwijkingen van de 'objectieve' kans, want er is een kans dat je tien keer achter elkaar kop gooit met een munt. Bovendien komen in de natuur (bijvoorbeeld in de kwantummechanica) kansen voor als $1/\sqrt{2}$, terwijl een kans als eindige relatieve frequentie per definitie een rationaal getal is. Daarom wordt vaak voorgesteld om de limiet $N \to \infty$ te nemen, maar dat brengt weer nieuwe moeilijkheden met zich mee. Bestaat de limiet? Kunnen we een kansexperiment wel oneindig vaak herhalen? Hangt de limiet misschien af van de volgorde waarin de verschillende uitkomsten optreden? Ten slotte blijkt het hoe dan ook onmogelijk te zijn een kans als een relatieve frequentie te *definiëren*: zelfs bij inzet van stoere stellingen als de wet van de grote aantallen (sterk of zwak) ontkomt men niet aan de conclusie dat een dergelijke definitie circulair is.

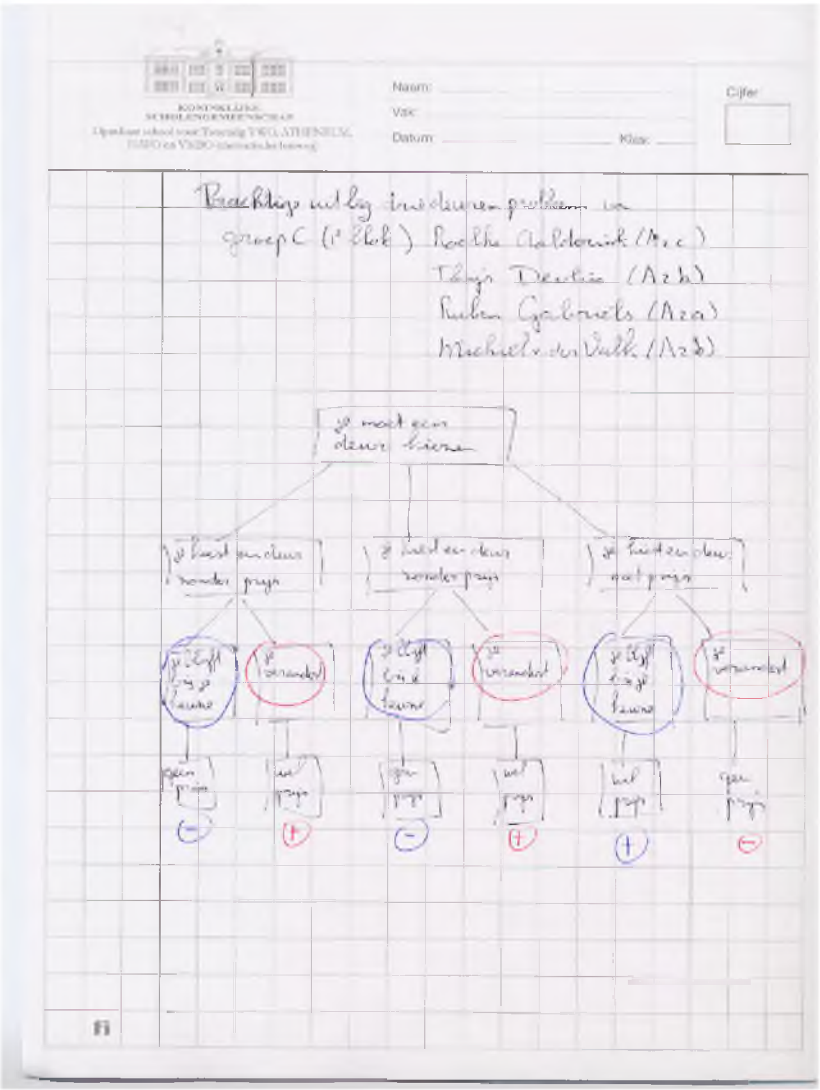
In de *subjectieve interpretatie* is een kans een mentale constructie, geïdentificeerd met de mate van geloof die iemand in een bepaalde toevallige gebeurtenis heeft. Deze interpretatie is ook van toepassing op éénmalige kansexperimenten. Maar hoe wordt een "mate van geloof" in een gebeurtenis A uitgedrukt een wiskundige kans $P(A)$, i.e. een getal, bij voorkeur tussen 0 en 1? Dit gaat - vertaald naar een 'realistische situatie' - als volgt. De wiskundedocent en een leerling sluiten een weddenschap af op A. De leerling kiest als eerste stap een zogenaamde *wed-ratio* $P(A)$; voorlopig is dat een willekeurig (reëel) getal. De docent kiest vervolgens een inzet $I(A)$, opnieuw een (positief of negatief) getal. Het feit dat de docent niet alleen de omvang van de inzet maar ook het teken mag kiezen is van essentieel belang voor de eerlijkheid van de weddenschap. De leerling 'betaalt' de docent $P(A)I(A)$; als de inzet negatief is (bij positieve $P(A)$, wat op dit moment nog niet gezegd is) ontvangt de leerling geld. Nu komt het moment dat de gebeurtenis plaatsvindt of niet. Als A optreedt 'betaalt' de docent de leerling $I(A)$; als A niet optreedt 'betaalt' de docent niets (ook hier geldt dat de docent geldt *ontvangt* als $I(A)$ negatief is). Wie uiteindelijk geld wint hangt af van uitkomst en van het teken van $I(A)$ en van $P(A)$.

Wat heeft dit men kansrekening te maken? Stel nu dat het duo op een serie gebeurtenissen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in een gegeven kansexperiment wedt die samen de zekere gebeurtenis vormen (het geval van een enkele A is een speciaal geval hiervan met $A_1 = A$ en $A_2 =$ *niet*-A). Er komen dan getallen $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, ... en $I(A_1)$, $I(A_2)$, $I(A_3)$, ... De eerste serie getallen geeft een functie P , gedefinieerd op de lijst van gebeurtenissen van het bewuste kansexperiment. Nu komt het: de beroemde *Dutch book stelling* van Ramsey en De Finetti zegt dat de functie P voldoet aan axioma's van de kansrekening dan en slechts dan als de docent *niet* door een slimme keuze van zijn inzetten $I(A_1)$, $I(A_2)$, $I(A_3)$, ... een *Dutch book* kan maken (i.e. weddenschap die de leerling *ongeacht de uitkomst* verliest).

Oplossing van het driedeurenprobleem

Beide interpretaties van de kansrekening blijken van toepassing op het driedeurenprobleem en geven de correcte oplossing als de onderliggende aannamen goed in kaart worden gebracht. Het driedeurenprobleem kan immers zowel slaan op een éénmalige uitvoering van de quiz als op een wekelijks herhaalde uitzending.

Bij de toepassing van de objectieve frequentie-interpretatie van kansen is het essentieel dat de keuzes van zowel de quizmaster als de deelnemer toevallig zijn *en ongecorreleerd*. Als de quizmaster de auto in opeenvolgende weken namelijk systematisch achter deur 1, 2, 3, 1, 2, 3, enzovoort zet en de deelnemers precies op delfde manier een deur kiezen, plaatst de quizmaster de auto weliswaar gemiddeld 1/3 keer achter een willekeurige deur en kiest de deelnemer eveneens gemiddeld 1/3 keer een bepaalde deur, maar zal de deelnemer altijd winnen als hij zijn eerste keus niet verandert en altijd verliezen als hij dat wel doet! Dit is in strijd met de 'correcte' oplossing van het probleem, waaruit blijkt dat men zeer zorgvuldig om moet gaan met de frequentie-interpretatie. Ik zal de lezer de verdere uitwerking met behulp van de frequentie-interpretatie besparen en merk slechts op dat de juiste oplossing kan worden gevonden met behulp van de techniek van de kansboom *en dat het gebruik van deze techniek de frequentie-interpretatie stilzwijgend aanneemt.* Ik geef hier de oplossing met de kansboom van drie scholieren uit de tweede klas.



De subjectieve interpretatie geeft m.i. een zuiverdere uitleg van de juiste oplossing; zie ook de Wikipedia (2007) over het Monty Hall Problem. Je begint met het bepalen van de mentale kansen die een rationele deelnemer aan de relevante gebeurtenissen toekent. De notatie is dat A_1 betekent dat de auto achter deur 1 staat, enzovoort, terwijl Q_1 betekent dat de quizmaster deur 1 opent, etcetera. In het subjectieve kansbegrip is het essentieel op te merken dat de kansen die nu volgen die van de *deelnemer* zijn; voor de *quizmaster* zijn alle kansen uiteraard gelijk aan 0 of 1.

Er geldt *a priori* $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Stel dat de deelnemer deur 1 kiest, dan geldt volgens de spelregels tevens $P(Q_1) = 0$ en $P(Q_2) = P(Q_3) = 1/2$. Voor de voorwaardelijke kansen volgt $P(Q_2|A_3) = P(Q_3|A_2) = 1$ en $P(Q_2|A_1) = P(Q_3|A_1) = 1/2$. Als de quizmaster deur 2 opent, is de kans dat de deelnemer de auto wint als hij wisselt gelijk aan $P(A_3|Q_2)$, terwijl de kans dat hij wint als hij niet wisselt gegeven wordt door $P(A_1|Q_2)$. Om deze kansen uit te rekenen gebruik je de Regel van Bayes (die onmiddellijk uit de definitie van een voorwaardelijke kans volgt). Deze luidt: $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$, onder de aanname dat $P(B)$ niet nul is. Dit levert uiteindelijk voor de kans dat de deelnemer wint als hij wisselt respectievelijk niet wisselt het juiste antwoord op:

$$P(A_3|Q_2) = P(Q_2|A_3)P(A_3)/P(Q_2) = (1 \times 1/3) /(1/2) = 2/3$$

$$P(A_1|Q_2) = P(Q_2|A_1)P(A_1)/P(Q_2) = (1/2 \times 1/3) / (1/2) = 1/3.$$

Klaas Landsman

Radboud Universiteit Nijmegen

Literatuur

Baartse, W. (2007). *Toeval is logisch: Johan Cruijff van A tot Z.* Den Haag: BZZTôH.

Van den Brandhof, A. (2006). Hommeles over drie deuren. www.kennislink.nl/web/show?id=159743

Dekkers, M. & Landsman, K. (2006). *Bestaat Toeval?* Lesbrief bij de gelijknamige RU Masterclass Wiskunde 2006 (concept). www.math.ru.nl/~landsman/bestaattoeval.pdf.

Dekkers, M. & Landsman, K. (2007). *Interpretaties van kansen, de Dutch Book stelling en het driedeurenprobleem.* Concept lesbrief bij “In zee met wiskunde D”. www.math.ru.nl/~landsman/lesbrief.pdf.

Derksen, T. (2006). Lucia de B.: *Reconstructie van een gerechtelijke dwaling.* Diemen: Veen Magazines.

Fine, T.L. (1973). *Theories of probability.* New York: Academic Press.

Gigerenzer, G. & Edwards, A. (2003). Simple tools for understanding risks: from innumeracy to insight. *BMJ* 327, 741-744.

Gillies, D. (2000). *Philosophical theories of probability.* Cambridge: Cambridge University Press.

Haddon, M. (2004). *Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht*. Amsterdam: Contact.

Kütting, H. (1981). *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Freiburg: Herder Verlag.

Landsman, K. (2006). Bestaat Toeval? *Nieuwe Wiskrant* 26-1, 12-17.

Mainzer, K. (2007). *Der kreative Zufall: Wie das Neue in die Welt kommt*. München: C.H. Beck.

Mellor, D.H. (2005). *Probability: A philosophical introduction*. New York: Routledge.

Nepveu, M. & Krijn, N. (2006). Waarschijnlijkheid, een wiskundig buitenbeentje? *Nieuwe Wiskrant* 26-2, 39-47.

Nijdam, B. e.a. (1975). *Statistiek en kansrekening voor het v.w.o.* (tweede geheel herziene druk). Lelystad: IOWO.

Pfaltzgraff, H. (2006). *Experimenteren met kansen: simulatie met de grafische rekenmachine.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Plato, J. von (1994). *Creating modern probability.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sjerps M. (2004). Forensische statistiek. *Nieuw archief voor wiskunde* (vijfde serie), 5/2, 106-111.

Tijms, H. (2002). *Spelen met kansen.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Vermij, R. (2004). *Christiaan Huygens: De mathematisering van de werkelijkheid.* Diemen: Veen Magazines.

Wikipedia (2007). Monty Hall Problem. en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.