

## Klaas Landsman

*Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP)*

*Radboud Universiteit Nijmegen*

*Toernooiveld 1*

*6525 ED NIJMEGEN*

*landsman@math.ru.nl*

### De teloorgang van het wiskundeonderwijs

# Blijf niet mokkend aan de kant staan!

De belangstelling voor wiskunde onder scholieren neemt al jaren af. Dit blijkt op niet mis te verstane wijze uit de dalende instroom in de universitaire wiskundeopleidingen: in 1976 waren er bijvoorbeeld rond de vierhonderd wiskundestudenten aan de toenmalige Katholieke Universiteit Nijmegen, nu zijn het er ongeveer vijftig aan de Radboud Universiteit. De percentuele daling aan andere universiteiten is navenant. In dit artikel schetst Klaas Landsman, hoogleraar Analyse, de oorzaken die volgens hem tot deze enorme achteruitgang hebben geleid. Tevens laat hij zien welke initiatieven mogelijk tot een oplossing kunnen leiden.

Soms is er even een kleine opleving, zoals in 2006. Maar ook dan blijft het totale aantal wiskundestudenten in Nederland vergeleken met buurlanden letterlijk lachwekkend: altijd raak met buitenlandse gasten!

Een meer anekdotische aanwijzing voor de dalende belangstelling komt uit persoonlijke contacten met scholieren op masterclasses en workshops. Hun typische verhaal kan kort worden samengevat: ze krijgen alsmat te horen dat de wiskunde zo belangrijk is en dat het een vereiste is voor veel vervolgoopleidingen, maar vinden zelf dat dit belang op school absoluut niet duidelijk wordt gemaakt. Wiskunde wordt in de onderbouw nog wel leuk gevonden, maar in de Tweede Fase valt het vak voor de meeste scholieren door de mand. Ook docenten klagen over de verhaaltjeswiskunde die ze momenteel gedwongen zijn te onderwijzen en waarin iedere uitdaging voor de leerling ontbreekt. Noch de onuitputtelijke schoonheid van de abstracte wiskunde, noch haar spectaculaire toepassingen in de natuurkunde en de maatschappij

(bijvoorbeeld in de economie, de informatica en de telecommunicatie) komen behoorlijk (of überhaupt) aan bod. De stemming onder de meer ambitieuze wiskundecenten is er zelfs een van woede. Tijdens de lancering van het Universum-Programma van het Platform Bèta Techniek in Utrecht op 21 november 2005 (waar ondergetekende de eerste Universumlezing uitsprak) brak bijvoorbeeld een openlijke opstand uit tegen de aanwezige minister Van der Hoeven. Zij koos onmiddellijk het hazenpad!

Met de belangstelling neemt ook de kennis af. De slechte rekenvaardigheid van pabostudenten is in 2006 veelvuldig in het nieuws geweest en daarnaast heeft vrijwel iedere universiteit en hogeschool de afgelopen jaren uit instaptoetsen en studieresultaten ervaren dat zowel wiskundig inzicht als formulevaardigheid van eerstejaars sterk te wensen over laten. Niet allen de 'harde' bètavakken, maar ook opleidingen als economie hebben hier last van. Een uniek moment in de geschiedenis van het onderwijs was de actie *Lie-*

*ve Maria* in januari 2006 [1], waarin dit keer geen knorrende hoogleraren maar de studenten zélf zich bij de minister beklaagden dat ze "het universitair niveau eigenlijk niet aankunnen" omdat ze "merken dat ze te weinig wiskunde op de middelbare school hebben gehad."

### Oorzaken in de maatschappij

Deze onbevredigende situatie heeft lange wortels, die zowel in het onderwijs als in de maatschappij gezocht moeten worden. Sommige pedagogische inzichten lijken zich vrijwel autonoom te hebben ontwikkeld, maar vaak zijn onderwijsvernieuwingen ook het directe gevolg van veranderende maatschappelijke inzichten. Daarbij kan bijvoorbeeld worden gedacht aan de sinds de jaren zeventig door de politiek drammerig doorgevoerde gelijkheidsideologie, die de wiskunde op school geen goed heeft gedaan [2–4]. Vooral het weghalen van de lerarenopleidingen van de 'elitaire' universiteiten heeft rampzalige gevolgen gehad. Momenteel krijgen ook vwo-leerlingen dikwijls wiskunde van docenten die op het hbo zijn opgeleid met een zeer beperkt wiskundepakket [5], terwijl experts het er over eens zijn dat juist elementaire wiskunde moet worden gedoceerd vanuit een 'hoger' standpunt, waarbij het noodzakelijk is dat de docent over diep inzicht in het vak beschikt [6].



Los hiervan is een nieuwe generatie middelbare scholieren opgestaan wier leven draait om MSN en *Civilization IV* [7]: waar wij boeken lezen in onze goed verlichte kamers en sportten in de buitenlucht, brengt de jeugd van tegenwoordig haar tijd zoek met *chatten* en *gamen* in duistere en slecht geventileerde kelders onder spelletjeswinkels. Een geluk bij een ongeluk is dat wiskunde niet bij voorbaat kansloos is onder deze jongeren: het moet alleen ‘gepimpt’ worden. Voor de oudere lezers van het NAW die dit woord wellicht niet kennen een voorbeeld: de vroegere loopbaan van boekhouder op kantoor kan men pimpen tot een *career* in *Finance* bij *Deloitte*. A propos: het valt op te merken dat het carrièreperspectief bij de huidige scholieren een steeds grote rol speelt in de profiel- en vervolgens de studiekeuze, terwijl het hen alerminst duidelijk wordt gemaakt welke fantastische mogelijkheden de wiskunde op dit vlak biedt [8].

Wat de generatiewisseling betreft moet mij tevens de opmerking van het hart dat met name veel van de zittende universitaire wiskundigen de hand in eigen boezem zouden moeten steken: zij zijn niet met hun tijd meegegaan en hebben daardoor een vrijwel onoverbrugbare kloof gecreëerd tussen zichzelf als introverte kamergeleerden en de scholieren die zij zo graag hun collegezalen zouden zien bevolken. De legendarische laatste woorden van Archimedes (*“Μη μου τους κύκλους τάραττε,”* ofwel “verstoor mijn cirkels niet,” alvorens hij werd gedood door een soldaat die eerst beleefd vroeg wie hij was en conform de opdracht van zijn commandant het leven van Archimedes zou hebben gespaard als die de moeite had genomen de vraag te beantwoorden) zijn hier typerend: de eigenzinnigheid waar veel wiskundigen zelfs trots op lijken te zijn heeft niet mijn

bewondering. Sterker nog, mijn sympathie gaat in dit geval eerder uit naar de soldaat dan naar zijn slachtoffer.

#### Oorzaken in het onderwijs

De ontwikkeling van het Nederlandse wiskundeonderwijs is te reconstrueren uit de verrukkelijke bundel *Honderd Jaar Wiskundeonderwijs* [9]. Deze ontwikkeling is van belang voor mijn onderwerp, omdat velen van mening zijn dat de onderwijsvernieuwingen van de afgelopen twintig jaar in de eerste plaats verantwoordelijk moeten worden gehouden voor zowel de dalende belangstelling als de kennis van de wiskunde onder scholieren. Mét vele universitaire collega’s [10] (inclusief vakdidactici) en universitair opgeleide docenten vind ik dat zelf ook, maar deze mening is omstreden: op het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum [11] denkt men — zo bleek uit een bezoek aan dit ‘toonaangevende onderwijsadviesbureau’ — dat het juist geweldig gaat, en ook het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren staat achter de onderwijsvernieuwingen [12]. Zonder al te zeer te overdrijven beweer ik daarentegen het volgende: *De Nederlandse schoolwiskunde is teruggevallen naar de periode vóór Plato!*

Om dit oordeel op waarde te schatten volgt hier eerst een korte geschiedenis van de wiskunde. Uit historisch onderzoek in vooral de afgelopen vijftig jaar is duidelijk geworden dat het begrip wiskunde zoals wij dat nu hanteren in de eerste helft van de vierde eeuw voor Christus is ontstaan in het Athene van Plato [13]. In deze periode werd een praktische bezigheid die duizenden jaren eerder in de Egyptische en Babylonische beschavingen was ontwikkeld als hulpmiddel bij zaken als landmeetkunde, handel en belastinginning omgezet in een nieuwe wetenschap met een geheel eigen taal en methodiek. De wezenlij-

ke kenmerken van de moderne wiskunde, namelijk haar axiomatisch-deductieve opbouw (Aristoteles) en het abstracte karakter van wiskundige objecten (Plato), dateren uit het genoemde tijdvak. Euclides trof dit raamwerk voltooid aan. Vervolgens moest de mensheid echter ruim tweeduizend jaar wachten tot de abstracte wiskunde op diepzinnige wijze kon worden toegepast: dit was de prestatie van Newton. Sindsdien balanceert de wiskunde op een gezonde wijze tussen abstractie en toepassingen [14].

Helaas heeft dit duale karakter van de wiskunde zijn weg naar het middelbaar onderwijs nooit gevonden. Tot 1960 (hier gerekend als het laatste relevante eindexamenjaar) bestond het wiskundeonderwijs op Nederlandse scholen uit euclidische meetkunde, rekenen, goniometrie, trigonometrie, en enige algebra. Dit gaf weliswaar een uiterst beperkt beeld van de wiskunde, maar het was tenminste echte wiskunde — zij het gespeend van enige actuele toepassing. De in de *zeventiende eeuw* ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening, die sinds Newton de basis vormt voor het leeuwendeel van zowel de zuivere als de toegepaste wiskunde, werd in 1961 op het programma gezet. Dit programma werd (onder invloed van de zogenaamde *New Math* beweging) in 1968 alweer herzien, waardoor de prille toepassingen van de calculus uit de boeken verdwenen en plaatsmaakten voor abstractie op een voor de meeste scholieren onbegrijpelijk niveau. Getalenteerde leerlingen kwamen daarbij nog wel aan hun trekken, maar de meeste scholieren uit die tijd hebben vermoedelijk nog steeds nachtmerries over het eindexamen wiskunde.

Uiteraard sloeg de slinger vervolgens naar de andere kant door: in 1987 werden de vakken Wiskunde 1 en 2 vervangen door Wiskunde A en B, waarin het zogenaamde ‘realis-



Fotograaf: Dick van Aalst, Radboud Universiteit Nijmegen

tische rekenen' voorop stond. Ondanks aanpassingen in 1999 (in verband met de invoering van de profielen) en in de toekomst ook in 2007 (herziening Tweede Fase) en 2010 (waar na er vier stabiele vakken genaamd Wiskunde A, B, C en D zullen zijn), staat dit didactische model sindsdien centraal - zij het onder wisselende namen als *concept-context* en 'betekenisrijke wiskunde'. De 'realistische contexten' stammen veelal uit het dagelijks leven, zo niet uit de onmiddellijke ervaringswereld van de scholieren, en leiden in de praktijk tot verhaaltjessommen waarin de leerlingen nog niet eens leren modelleren.

Mijn mening zal nu duidelijk zijn: uit gezond wiskunde-onderwijs zou het duale karakter van de wiskunde — i.e. abstractie én toepassingen — voortdurend en op ieder niveau moeten blijken: de abstractie komt uiteindelijk voort uit toepassingen, terwijl omgekeerd juist de meest opmerkelijke toepassingen pas mogelijk worden vanuit een hoger abstract gezichtspunt. Beide aspecten van de wiskunde moeten daarom in het onderwijs hand in hand gaan [15].

#### Oplossingen: lange termijn

Om het enthousiasme voor wiskunde onder leerlingen én docenten te herstellen is het duidelijk dat op de lange termijn een groot-scheepse hervorming van het wiskundeonderwijs noodzakelijk is. Hierbij zou het bovengenoemde duale karakter van de wiskunde een sleutelrol moeten spelen, onder inachtneming van de specifieke handel en wandel van de huidige cohorten scholieren. Inspirende nascholingsactiviteiten voor docenten zouden deze ontwikkeling moeten flankeren.

Een dergelijke hervorming wordt momenteel tot op zekere hoogte voorbereid door de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) [16]. (In een opmerkelijk manoeeu-

vre van de Tweede Kamer is deze als enige van alle Vernieuwingscommissies in het bèta-onderwijs onder toezicht gesteld, en wel van de zogenaamde Resonansgroep Wiskunde van het ministerie van OCW [17].) Een belangrijke vernieuwing die cTWO begeleidt is de invoering van het nieuwe vak Wiskunde D, dat een soortgelijke doelgroep lijkt te hebben als het vroegere Wiskunde 2: het is een verrijksingsvak voor wiskundig getalenteerde leerlingen in het NT-profiel en (minder waarschijnlijk) het NG-profiel. Om de scholen op weg te helpen zijn inmiddels in Amsterdam [18], Delft, Eindhoven, Nijmegen en Twente Regionale Steunpunten voor wiskunde D opgezet. De laatste vier werken hierbij samen en hebben een uitgebreid scholingsprogramma "in zee met wiskunde D" voor docenten opgezet [19]. Ook het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie [20] biedt kansen om interessante toepassingen van wiskunde in het onderwijs te brengen.

Ofschoon nu al op vele scholen met wiskunde D wordt geëxperimenteerd, zullen de resultaten van de algehele onderwijshervorming pas ver na 2010 zichtbaar worden. In het verlengde daarvan zullen ook de programma's UNIVERSUM en SPRINT van het Platform Bèta Techniek [21] (die nu al lopen en in veel opzichten reeds effectief zijn), wat de wiskunde betreft naar mijn verwachting pas werkelijk gaan renderen als de broodnodige hervorming van het wiskundeonderwijs eenmaal is doorgevoerd. Ten slotte is het ketenplan van Deltawis [22] indrukwekkend en alomvattend. Juist daarom zal het vermoedelijk pas na nog langere tijd vruchten afwerpen.

#### Oplossingen: korte termijn

Gezien deze lange adem van de op handen zijnde hervormingen is het zinvol om voor de korte termijn prikkelende initiatieven te ont-

wikkelen die:

1. Leerlingen laten zien hoe leuk én uitdagend wiskunde werkelijk is;
2. Het uitstekende carrièreperspectief van een wiskundige duidelijk maken.

In het oog springende initiatieven met de eerste doelstelling zijn bijvoorbeeld:

- Kangoeroe-wiskundewedstrijd [23];
- Wiskundetoernooi in Nijmegen [24];
- Begeleiding van profielwerkstukken [25];
- Masterclasses [26] en Webclasses [27];
- Junior College Utrecht [28];
- Zomerkampen [29];
- Wiskunde Olympiade [30] en A-lympiade [31];
- Nationale PR-medewerker wiskunde [32].

Het laatste project omvat ook de fantastische websites van de Wiskundemeisjes [33] en van Kennislink [34] (voor zover die over wiskunde gaat). Spaar me als ik iets over het hoofd heb gezien; mijn gezichtsvermogen is beperkt.

Wat de tweede doelstelling betreft zouden Jet-Net [35] en het Bèta 1 op 1 project van het Platform Bèta Techniek [36] genoemd kunnen worden, maar in beide programma's ligt de nadruk niet speciaal op de wiskunde (en daar zijn dan ook geen aparte middelen voor). Dat geldt wel voor de propagandafilm voor scholieren die momenteel met steun van het Platform Bèta Techniek gemaakt wordt. Deze film gaat op het wiskundetoernooi op 28 september 2007 in première en zal daarna gratis aan alle middelbare scholen met vwo worden gestuurd.

Een voorbeeld van een buitenlands initiatief dat beide doelstellingen op voortreffelijke wijze bereikt is het Engelse *Mathematics Millenium Project* [37]. Het gaat hier om het enthousiasmeren van kinderen van 5 tot 19 jaar voor wiskunde, en dit gebeurt door middel van een indrukwekkend scala van activiteiten, lopend van de ontwikkeling van verrij-

kingsmateriaal voor het basisonderwijs tot workshops over cryptografie voor de hogere klassen van het middelbaar onderwijs. Het *Mathematics Millenium Project* heeft een miljoenenbegroting en geniet dan ook financiële ondersteuning uit brede kring (bijvoorbeeld Microsoft, Cambridge University Press, etc.). Een dergelijk geïntegreerd en goed gefinancierd wiskunde-project zou ook in Nederland niet misstaan; de noodzaak voor een dergelijke onderneming is in hier zelfs veel groter dan in Engeland! Zoals het Engelse voorbeeld leert is daar echter een breed palet van sponsors voor nodig.

### Blijf niet mokkend aan de kant staan

Dit citaat van Karel Glastra van Loon indachtig ben ik momenteel medeoprichter van het Nijmeegse Regionale Steunpunt voor wiskunde D, lid van de Resonangroep Wiskunde van OCW, lid van de Taakgroep Landelijke wiskunde-PR, voorzitter van de PR-commissie wiskunde van de RU, medeorganisator van het wiskundetoernooi en regelmatig spreker voor docenten. Maar het meest houd ik van het werken met de scholieren zelf.

Mijn opzet daarbij is om hoogtepunten uit het onderzoek in de klas te brengen, en dan

bedoel ik ook echt hógtepunten: Newton en Einstein. De twee projecten waar ik momenteel bij betrokken ben begeven zich op het raakvlak van wiskunde en natuurkunde (met eventueel een filosofisch of historisch perspectief), wat uiteraard een goede basis biedt om het duale karakter van de wiskunde tot zijn recht te laten komen. Ze zijn bedoeld als onderwerp voor profielwerkstukken in het NT-profiel of als modules in wiskunde D en mogelijk ook Natuur, Leven en Technologie.

Het door NWO gefinancierde Leraar in Onderzoekproject *Newtons afleiding van de wetten van Kepler* gaat over het eerste moment in de geschiedenis waarin diepe en abstracte wiskunde met succes werd toegepast op de beschrijving en verklaring van de kosmos. Het project illustreert daarmee de interactie tussen de axiomatisch-deductieve opzet en de concrete toepasbaarheid wiskunde; in deze combinatie lag precies de kracht van Newtons aanpak. Aldus leidde hij uit de later naar hem genoemde drie bewegingswetten en zijn universele gravitatiewet de planeetbewegingen om de zon af, en gaf hij daarmee onder meer een wiskundige afleiding van de wetten van Kepler (die in eerste instantie op zuiver empirische basis waren gepostuleerd). De wis-

kundige technieken zijn beperkt tot de kegelsneden en elementaire differentiaalrekening [38].

*Bestaat Toeval?* begint met een conceptuele en wiskundige analyse van het kansbegrip en gaat dan over tot de beantwoording van de vraag of zuiver toeval bestaat in de natuur [39]. Het project draait om de zogenaamde Bell-ongelijkheden en illustreert het beslissende ingrijpen van de wiskunde in een oorspronkelijk conceptueel-filosofische discussie: het werk van Bell beslechtte namelijk het beroemde debat tussen Bohr en Einstein over de grondslagen van de kwantummechanica. Ook hier zijn de wiskundige technieken beperkt: we gebruiken niet meer dan elementaire kansrekening en vlakke meetkunde.

Dat peilloos diepe gevolgtrekkingen als de vorm van de planeetbanen en het bestaan van zuiver toeval toegankelijk zijn op het wiskundig niveau van vwo-6 is een gevolg van wat Freudenthal [40] de 'geleide heruitvinding' noemde: het leerproces van de mensheid moet in de klas niet letterlijk herhaald worden, maar moet worden aangevuld met latere kennis. Ook van dit principe zijn beide projecten een illustratie. ←

### Referenties

- 1 [www.lievemaria.nl](http://www.lievemaria.nl)
- 2 F. Furedi, *Waar Zijn de Intellectuelen? Persoonlijke ervaringen in de wereld van het filisterdom*, Meulenhoff, Amsterdam, 2006.
- 3 L. Prick, *Drammen Dreigen Draaien: Hoe het Onderwijs Twintig Jaar Lang Vernieuwd Werd*, Mets en Schilt, Amsterdam, 2006.
- 4 M.L.A. Rietdijk-Helmer (red.), *Steeds Minder Leren: De Tragedie van de Onderwijshervormingen*, Uitgeverij IJzer, Utrecht, 2005.
- 5 M. Peletier, 'Variatie doet weten', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5(7) (december 2006), pp. 234–241
- 6 H. Freudenthal, *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, Reidel, 1978.
- 7 J. Bosma en I. Groen, *Generatie Einstein: Slimmer, Sneller en Socialer*, Pearson Prentice Hall NL, Amsterdam, 2006.
- 8 R. Kaenders en J. Top, 'Het zit hem in de derde klas', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 (december 2004), pp. 302–303.
- 9 F. Goffree, M. van Hoorn en B. Zwaneveld (red.), *Honderd Jaar Wiskundeonderwijs* (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), Leusden, 2000.
- 10 Zie bijvoorbeeld de oratie van Frans Keune, *Naar de knoppen*, te vinden op [www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html](http://www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html)
- 11 [www.aps.nl](http://www.aps.nl)
- 12 Zie de Bestuursreactie mbt Standpunt resonansgroep, [www.nvww.nl/page.php?id=1776](http://www.nvww.nl/page.php?id=1776)
- 13 Zie bijvoorbeeld F. Lasserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (Hutchinson, Londen, 1964), D.H. Fowler, *The Mathematics of Platos Academy*, Oxford University Press, Oxford, 1987 en R. Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 14 M. Keestra (red.), *Een Cultuurgeschiedenis van de Wiskunde*, Nieuwezijds, Amsterdam, 2006.
- 15 Zie ook het op dit punt voortreffelijke *Visiedocument* van cTWO, [www.fi.uu.nl/ctwo](http://www.fi.uu.nl/ctwo)
- 16 [www.fi.uu.nl/ctwo/](http://www.fi.uu.nl/ctwo/)
- 17 [www.resonansgroepwiskunde.nl/](http://www.resonansgroepwiskunde.nl/)
- 18 [www.wiskunded.nl/amsterdam/](http://www.wiskunded.nl/amsterdam/)
- 19 [www.wiskundedsteun.nl](http://www.wiskundedsteun.nl)
- 20 [www.betavak-nt.nl](http://www.betavak-nt.nl)
- 21 [www.platformbetatechniek.nl](http://www.platformbetatechniek.nl)
- 22 [www.fi.uu.nl/deltawis/](http://www.fi.uu.nl/deltawis/)
- 23 [www.math.ru.nl/kangoeroe/](http://www.math.ru.nl/kangoeroe/)
- 24 [www.ru.nl/wiskundetoernooi/](http://www.ru.nl/wiskundetoernooi/)
- 25 [www.betasteunpunt.nl/](http://www.betasteunpunt.nl/)
- 26 Vrijwel alle universiteiten doen dit inmiddels, onder pakkende titels als *Kraak de code!*
- 27 Zie bijvoorbeeld [wims.math.leidenuniv.nl/wims](http://wims.math.leidenuniv.nl/wims) en [staff.science.uva.nl/~craats/#webklas](http://staff.science.uva.nl/~craats/#webklas)
- 28 <http://www.jcu.uu.nl/>
- 29 [www.vierkantvoorwiskunde.nl/kampen/](http://www.vierkantvoorwiskunde.nl/kampen/)
- 30 [olympiads.win.tue.nl/nwo/](http://olympiads.win.tue.nl/nwo/)
- 31 [www.fi.uu.nl/olympiade/](http://www.fi.uu.nl/olympiade/)
- 32 [www.wiskgenoot.nl/watbiedt/natpr.html](http://www.wiskgenoot.nl/watbiedt/natpr.html)
- 33 [www.wiskundemeisjes.nl](http://www.wiskundemeisjes.nl)
- 34 [www.kennislink.nl/web/show?id=100552](http://www.kennislink.nl/web/show?id=100552)
- 35 [www.jet-net.nl/start.html](http://www.jet-net.nl/start.html)
- 36 [www.beta10p1.nl/](http://www.beta10p1.nl/)
- 37 [mmp.maths.org/](http://mmp.maths.org/)
- 38 De LiO is Maris van Haandel en ook Gert Heckman is een drijvende kracht achter dit project.
- 39 *Bestaat Toeval?* ontwikkel ik samen met Mirte Dekkers. De foto's bij dit artikel zijn afkomstig uit deze Masterclass. Zie K. Landsman, 'Bestaat toeval?', *Nieuwe Wiskrant* 26/1, september 2006, 21–26 voor een uitgebreide beschrijving.
- 40 H. Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Klett, Stuttgart, 1973.