Het HSA-vierkant

De Hype, Sensatie en Achtergrond

[Arno van den Essen]

Toen ik op 22 maart om 9:20u met de trein vanuit Nijmegen richting Parijs vertrok voor het geven van een lezing over mijn onderzoeksgebied, het Jacobi-vermoeden, had ik geen flauw idee dat amper een half uur later in Nederland een mediahype van start zou gaan rond een magisch vierkant, dat zo'n drie maanden eerder door drie middelbare scholieren in mijn Masterclass *Magische Vierkanten en Sudoku's* gevonden was. Wiskunde was voor een dag voorpaginanieuws in Nederland. In dit verhaal zal ik ingaan op de voorgeschiedenis, de fascinatie, het vierkant zelf en de 'nasleep'.

De Masterclass

Op 28 september 2006 kwamen 69 leerlingen naar de RU te Nijmegen om deel te nemen aan één van de Masterclasses die daar gedurende zes donderdagmiddagen gegeven werden. De onderwerpen waren *Krommen, Bestaat Toeval?* en *Magische Vierkanten en Sudoku's*. Nadat ieder van de drie docenten een inleidend praatje van zo'n twintig minuten over zijn onderwerp gehouden had, kregen de leerlingen de gelegenheid tijdens de pauze om te beslissen welke Masterclass ze wilden gaan volgen. Zo'n dertig leerlingen kozen voor *Magische Vierkanten en Sudoku's*.
In de volgende drie bijeenkomsten, die om de twee weken plaatsvonden, werden drie onderwerpen aan de orde gesteld, op grond waarvan de leerlingen een profielwerkstuk konden gaan maken. Deze onderwerpen waren: Sudoku's en modulo-rekenen (week 2), alfa-magische vierkanten (week 3) en Franklin-magische vierkanten (week 4). In de vijfde week werd een tiental mogelijke onderzoeksvragen geformuleerd en gingen de leerlingen hun onderzoeksvraag bepalen. In de zesde week werd er in groepjes aan het gekozen onderwerp gewerkt, onder begeleiding van de studentassistenten Stephan Berendonk, Dion Coumans, Mieke Janssen en mijzelf.

Het Franklin-mysterie

Rond 1750 construeerde de Amerikaanse staatsman en wetenschapper Benjamin Franklin (1706-1790) een vijftal bijzondere magische vierkanten. Een ervan is bovenstaand 8×8 vierkant. Deze verscheen op 17 januari 2006 op een postzegel van US Postal Service ter gelegenheid van Franklins 300e geboortedag.
Het bijzondere aan dit vierkant is dat niet alleen de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom gelijk is aan 260, maar dat bovendien de som van alle getallen in iedere halve rij en iedere halve kolom (vanaf de rand gerekend) gelijk is aan 130. Bovendien is ook de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk aan 130. In tegenstelling tot een 'gewoon' magisch vierkant is de som der getallen op de diagonaal niet gelijk aan de magische som. In plaats daarvan is de som van alle getallen op ieder van de vier gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 52, 3, 5, 54, 43, 28, 30, 45 of 45, 30, 28, 43, 23, 40, 34, 17 gelijk aan 260. Maar nog is niet alle magie beschreven. Ook alle parallelle gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1 of 20, 51, 5, 6, 58, 57, 15, 48 hebben 260 als som. Een bijzonder vierkant!
Hoe Franklin dit – en andere soortgelijke vierkanten – (in een avond) gemaakt had, bleef tot voor kort een mysterie. Toen ik in juni 2006 bezig was een hoofdstuk over Franklin-magische vierkanten voor mijn boek [1] te schrijven en daartoe bovenstaand Franklin-vierkant analyseerde, werd het mij al snel duidelijk hoe Franklin zulke vierkanten gemaakt *zou kunnen hebben*. Voor mijn oplossing maakte ik gebruik van een idee van Leonhard Euler (1707-1783) dat hij in 1776 gebruikte om 'gewone' zuiver magische vierkanten te maken. Voor de volledigheid: een $n \times n$ getallenvierkant heet een *magisch vierkant* (van orde n) als de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom en op ieder van de twee diagonalen hetzelfde is. Als de getallen in het vierkant bovendien de opeenvolgende getallen 1, 2, 3, …, n^2 zijn, heet het vierkant een *zuiver magisch vierkant*.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

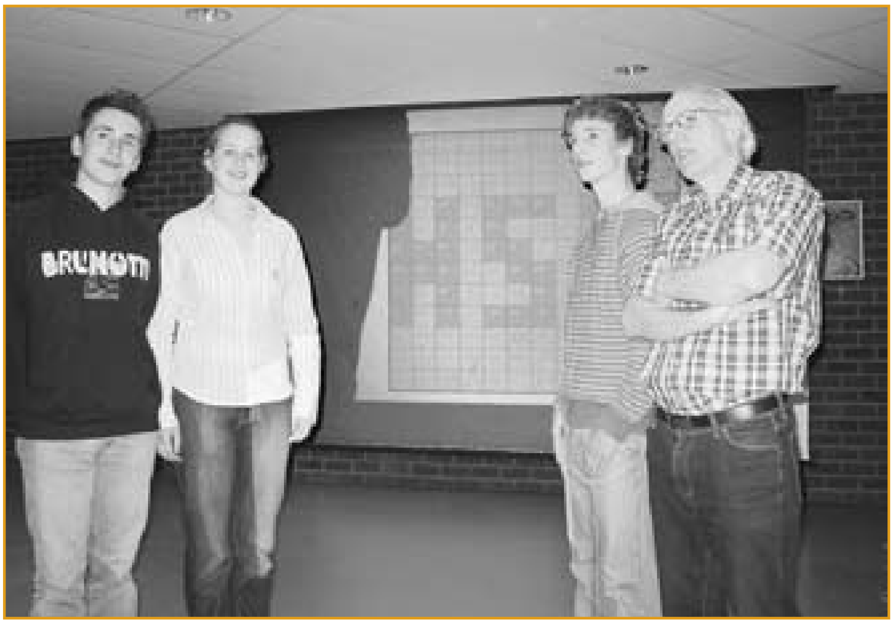
Het is eenvoudig in te zien dat een veelvoud van een magisch vierkant en de som van twee magische vierkanten van dezelfde orde (onder de matrixoptelling) weer een magisch vierkant is. Om nu een zuiver magisch vierkant van orde n te maken redeneerde Euler als volgt: Zoek eerst twee zogenoemde *Latijnse vierkanten* N en M, dat wil zeggen vierkanten bestaande uit de getallen 0, 1, 2, …, $(n - 1)$ met de eigenschap dat in iedere rij en iedere kolom de getallen 0, 1, 2, …, $(n - 1)$ precies één keer voorkomen (een Sudoku is dus een Latijns vierkant van orde 9 met nog wat extra eigenschappen). Neem nu aan dat ook op de diagonalen van N en M de getallen 0, 1, 2, …, $(n - 1)$ precies één keer voorkomen. Dan is het duidelijk dat zowel N als M magische vierkanten zijn met als som $0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$. Vorm dan het vierkant $V := n{\times}N + M$. Dit vierkant is dan ook magisch en al zijn getallen zijn minstens 0 en hoogstens $n \times (n - 1) + (n - 1) = n^2 - 1$. Het kan echter gebeuren dat sommige getallen in V meer dan een keer voorkomen. Om dit te voorkomen legde Euler aan de vierkanten N en M nog een eis op, namelijk dat ze *orthogonaal* zijn. Dit betekent dat het vierkant der paren dat ontstaat als je N en M op elkaar legt, uitsluitend uit verschillende paren moet bestaan. Met niet al te veel moeite kan men dan inzien dat het vierkant V alle getallen 0, 1, 2, …, $(n^2 - 1)$ ook daadwerkelijk bevat. Het vierkant V+1, dat ontstaat door bij alle getallen uit V het getal 1 op te tellen, is dan een zuiver magisch vierkant!
Toen ik bovenstaand 8×8 Franklin-vierkant bekeek, vroeg ik mij af of dit vierkant ook van de vorm $8 \times N + M + 1$ is, waarbij N en M Franklin-magische vierkanten zijn bestaande uit de getallen 0, 1, 2, …, 7. Het antwoord op mijn vraag bleek niet alleen bevestigend te zijn, maar bovendien bleek, zoals ieder eenvoudig kan narekenen, dat de vierkanten N en M een bijzonder eenvoudige structuur hebben. Om de leerlingen in mijn Masterclass deze structuur zelf te laten vinden wordt hun het 8×8 Franklin-vierkant voorgelegd en de opdracht is dan N en M te bepalen en vervolgens het patroon erin te ontdekken.

De uitdaging

Het waren Petra Alkema (15), Jesse Hoekstra (17) en Willem Schilte (17) die geboeid raakten door de eenvoud van de methode en vervolgens zelf aan de slag gingen om een zuiver 8×8 Franklin-vierkant te maken dat ook nog *panmagisch* is (dat wil zeggen waarvan ook de gebroken diagonalen de magische som van 260 hebben). Ze noemden het door hen gevonden vierkant ***Fra**p**pan**t*! Vervolgens besloten ze, in navolging van Benjamin Franklin, ook 16×16 zuiver Franklin-magische vierkanten te maken. De ultieme uitdaging was echter: kun je een zuiver 12×12 Franklin-magisch vierkant maken, want zo'n vierkant is tot nu toe nog niet gevonden!
Uitgedaagd door deze vraag en het succes bij het maken van de 8×8 en 16×16 Franklin-vierkanten besloten Petra, Jesse en Willem hun profielwerkstuk over het onbekende 12×12 Franklin-vierkant te maken. Het bleek echter geen eenvoudige opgave te zijn. Steeds maar weer lukte het niet om Franklin-vierkanten N en M te vinden die zowel orthogonaal waren alsook de halve kolom/rij eigenschap bezaten. Stephan Berendonk stelde daarom voor de halve kolom/rij eigenschap te vervangen door de *'1/3-de' rij/kolom eigenschap*, met andere woorden door de eis dat de som van alle getallen in ieder één-derde deel van een rij en ieder één-derde deel van een kolom (vanaf een rand gerekend) steeds hetzelfde is. Dit bleek een cruciale suggestie te zijn, die er uiteindelijk toe leidde dat op 14 december 2006 (mijn verjaardag!) het inmiddels veelbesproken HSA-vierkant [2] door Petra, Jesse en Willem gevonden werd. Ik was zeer enthousiast over deze nieuwe vondst en liet hun weten het vierkant in de Engelse versie van mijn boek te zullen opnemen. Inmiddels is er in de tweede druk van mijn boek ook uitvoerig aandacht aan dit vierkant besteed.

De presentaties

Op 1 maart 2007 tijdens de laatste bijeenkomst van de Masterclass, waarop de leerlingen hun resultaten aan de andere deelnemers mochten presenteren, merkte Willem op dat hij in het vierkant ook *cirkels* met de magische som van 870 had ontdekt. Het was deze opmerking die mijn interesse in het vierkant nieuw leven inblies en mij na wat experimenteren deed inzien dat het nog bijzonderder was dan dat ik oorspronkelijk al gedacht had. Zo bleek dat, als L de horizontale lijn is die het vierkant in twee gelijke delen verdeelt, de som van ieder getal en zijn gespiegelde ten opzichte van L steeds 145 is. Als gevolg hiervan zijn niet alleen cirkels met som 870 te maken maar ook bijna alle letters van het alfabet en natuurlijk allerlei figuren die symmetrisch ten opzichte van L zijn en uit twaalf getallen bestaan.
Ik vond het vierkant wel zó bijzonder dat ik op 13 maart besloot een klein stukje voor het Wiskundig Genootschap te schrijven getiteld 'Het HSA-vierkant'. Bovendien leek mij dit resultaat uitstekend geschikt om wat publiciteit voor wiskunde te krijgen: het is immers voor iedereen eenvoudig te begrijpen en het is verkregen door middelbare scholieren. Ik nam daarom contact op met Lex Plantaz, het afdelingshoofd van het Dominicuscollege te Nijmegen, de school van Jesse en Willem. Hij was inmiddels door wiskundelerares Hanneke Abbenhuis op de hoogte gesteld van het schitterende resultaat en reageerde terecht enthousiast. Op 21 maart tijdens de profielwerkstukkenavond werden de leerlingen door Klaas Landsman in het zonnetje gezet, nadat ik een kleine toelichting op het vierkant had gegeven. Na afloop



Van links naar rechts: Jesse, Petra, Willem, Arno.

werd ik benaderd door een van de ouders van een van de andere leerlingen. Ze werkte bij het ANP. Ik vertelde haar enthousiast dat dit vierkant *het meest magische vierkant* is dat ooit gemaakt is en dat het een *sensatie is in de wereld der magische vierkanten*.

Het ANP-bericht

De volgende morgen vertrok ik niets vermoedend van wat er komen ging met mijn vrouw naar Parijs voor het geven van een lezing. De betreffende journaliste van het ANP had mij wel gezegd dat er reacties zouden komen, maar door mijn eerdere ervaringen met de pers dacht ik dat dat wel mee zou vallen. (Toen ik bijvoorbeeld in oktober vorig jaar het 250 jaar oude Franklin-mysterie oploste, was niemand geinteresseerd!) Maar zoals inmiddels bekend werd het HSA-vierkant een mediahype.
Natuurlijk rijst de vraag: waarom? Het antwoord ligt besloten in het ANP-bericht dat, door enige spraakverwarring, een aantal dingen onjuist weergaf. Zo werd er gesproken over een *wereldwijde sensatie*, terwijl ik steeds gesproken (en geschreven) had over een sensatie in de *wereld der magische vierkanten*. Ook werd er gezegd dat de leerlingen een eeuwenoud probleem hadden opgelost, terwijl ik juist vorig jaar het 250 jaar oude Franklin-mysterie had opgelost en de leerlingen deze *methode gebruikt hadden*. Natuurlijk speelde ook de leeftijd van de scholieren (15 en 17) een cruciale rol: deze jonge leerlingen tegenover al die wiskundige genieën.

De nasleep

Bij terugkeer uit Parijs bleek ik te zijn overladen met e-mails van heel veel enthousiaste mensen die dachten het ontbrekende 12×12 vierkant te hebben gevonden of die nog grotere magische vierkanten gemaakt hadden, waarnaar we helemaal niet op zoek waren. Het heeft mij dan ook dagen gekost een groot aantal van deze reacties te beantwoorden. Maar wiskunde had, althans voor een paar dagen, de aandacht van een groot publiek: we stonden weer op de kaart. Natuurlijk waren er, zoals altijd, ook negatieve reacties, vanzelfsprekend van negatieve mensen, maar dat hoort erbij.
Voor mij was het allerbelangrijkste dat er over wiskunde gepraat werd en dat er zelfs in wiskundelessen tijd besteed werd aan magische vierkanten. Ook vind ik het zeer positief dat wiskunde in de persoon van Petra, Jesse en Willem drie ambassadeurs gekregen heeft!
Wat ik van deze ervaring geleerd heb?
Op de eerste plaats dat er in Nederland nog heel wat wiskundig talent rondloopt en ook dat, wanneer ik weer eens op reis ga één dag nadat ik met de media gesproken heb, ik mijn mobiele telefoon aan zal laten!

Noten

[1] Arno van den Essen (2006): *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot Sudoku*. Diemen: Veen Magazines.
[2] Genoemd naar de ontwerpers: Hoekstra, Schilte, Alkema.

Over de auteur

Arno van den Essen is als wiskundige verbonden aan de Radboud Universiteit te Nijmegen. Zijn onderzoeksgebied is algebra. Daarnaast houdt hij zich bezig met het populariseren van wiskunde en het maken van propaganda voor het verband tussen reuma en voeding.
E-mailadres: *A.vandenEssen@math.ru.nl*