70

70 ster-piramidegetal

Ik moet beginnen met te melden dat er achthoeksgetallen zijn. Deze vindt u met de formule $N*(3N-2)$.
Door deze getallen met punten weer te geven kunt u er een ster van maken i.p.v. een regelmatige achthoek. Hierom heten ze ook wel ster- of stervormige getallen. Door nu opeenvolgende stergetallen bij elkaar op te tellen krijgt u een sterpiramidegetal. Deze getallen zijn weer te geven door knikkers in de vorm van sterren laag voor laag op elkaar te stapelen. De eerste stergetallen zijn 1; 8; 21 en 40. Door deze vier bij elkaar op te tellen komt het getal 70 als vierde ster-piramidegetal te voorschijn. Dit optellen is eigenlijk stapelen, te beginnen met de onderste laag van 40 knikkers, daar bovenop komen 21, hier weer op komen 8, met als top 1.
Maar je kunt ook beginnen met een soort rechthoek. En hierbij hangt het af van met welk formaat rechthoek je begint. Begin je met 2 naast elkaar dan heb je twee rijen van 3 naast elkaar nodig om die eerste 2 op te leggen. Voor deze 2 lagen heb je weer 3 rijen van 4 nodig. Dit geheel komt dan te rusten op 4 rijen van vijf, wat 70 als rechthoekig piramidegetal van het soort 2 oplevert. Begin je met een rij van vijf tegen elkaar aan dan heb je met vier lagen al 70 met in de onderste laag 4 rijen van zeven knikkers. Tot de 75ste verjaardag van Euclides hebt u de tijd om Gulliver's Reizen te lezen want daar komt 70 voor in de *Lagado*-getallen gevormd door de reeks 1; 4; 7; 10; 13, enz.

Sjoerd Schaafsma

Jacob de Gelder (1765-1848) en de didactiek van de wiskunde

Danny Beckers

1. Inleiding

Ik was steeds overtuigd, dat < … > men, < … > zou moeten toegeven, dat het onderwijs en de beoefening der wetenschappen, voornamelijk die der wiskunde, in Nederland op verre na niet die betere rigting, die betere uitkomsten zouden hebben erlangd, op verre na niet zo zeer bevorderd zouden zijn geworden, indien hij niet onvermoeid gewerkt, niet rusteloos gepoogd hadde om te vervormen, te verbeteren, om de wetenschap meer toegankelijk te maken en te verbreiden. Daardoor dan heeft hij zich hoogst verdienstelijk gemaakt en de wetenschap aan zich verpligt.[1]

Deze woorden zijn afkomstig uit de biografie die Gideon Jan Verdam (*1802-†1866) in 1848 schreef van zijn vriend en leraar Jacob de Gelder. Uit de toon van deze biografie is men snel geneigd deze woorden af te doen als een romantische overdrijving: een stijl die in deze periode vaak werd gebruikt. Toch heeft De Gelder daadwerkelijk veel gedaan voor het onderwijs in zijn tijd. Hij was de eerste Nederlandse wiskundige die zijn didactische overtuigingen expliciet koppelde aan een leerprogramma. Dit leerprogramma was enige tijd populair: het werd in 1826 van staatswege gepropageerd, en tot 1860 werd het bijvoorbeeld enthousiast gebruikt door de Groningse wiskundeleraar J. Pantekoek[2]. De Gelder was in zijn tijd een zeer gewaardeerde wiskundige en werd geroemd als didacticus[3]. In dit artikel zal ik zijn didactische ideeën aan een beschouwing onderwerpen en daarbij laten zien dat De Gelders ideeën nu in zekere zin weer actueel zijn.

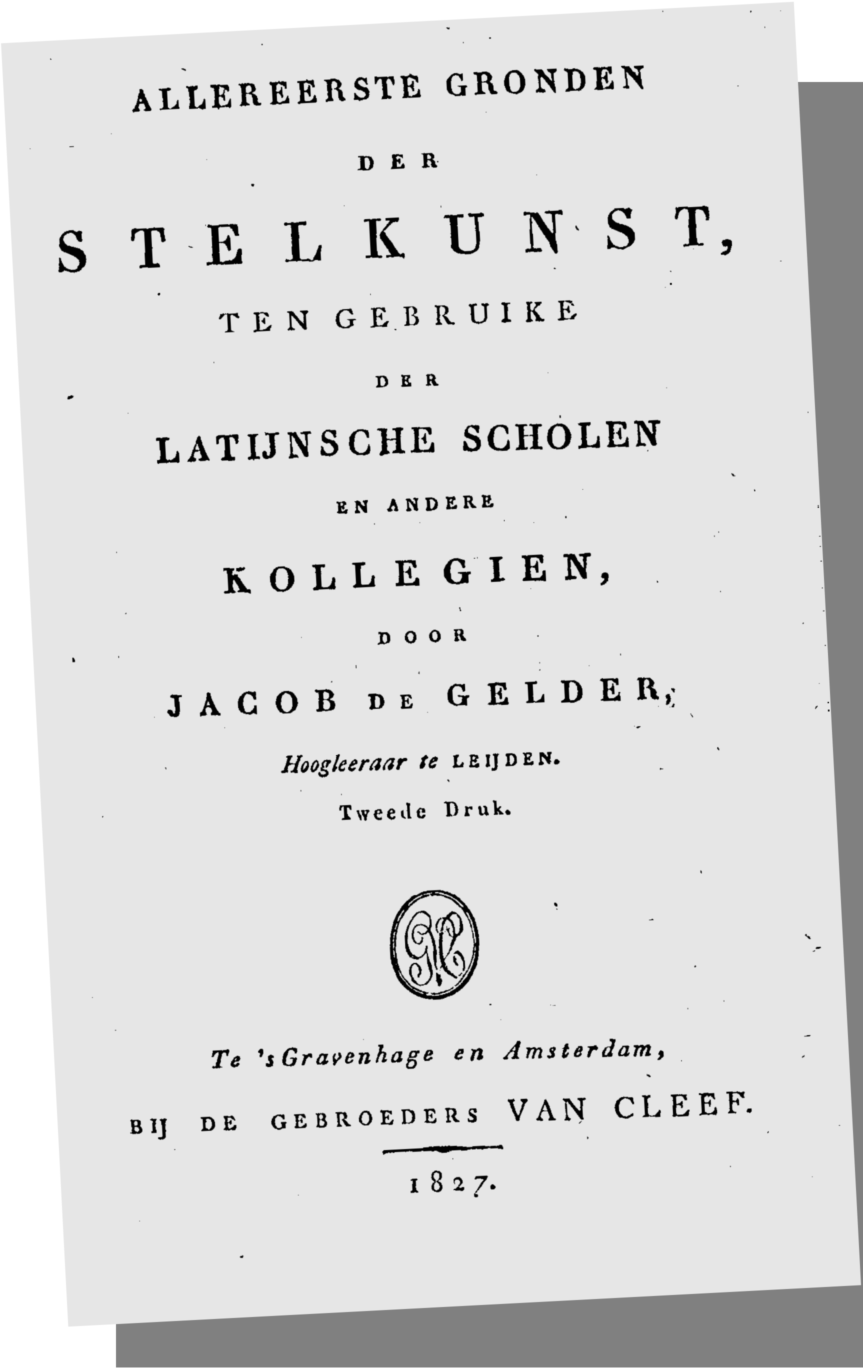
2. Biografische schets [4]

Jacob de Gelder was in de jaren tachtig van de achttiende eeuw een kostschool begonnen waarin hij onder andere onderwijs verzorgde in de wiskunde. Vanwege zijn afkomst – zijn ouders kwamen uit de sociale middenklasse – was hij niet in staat geweest aan de Latijnse school te studeren en dus was het voor hem onmogelijk een universitaire studie te beginnen. Hij interesseerde zich zeer voor de wiskunde, en behalve dat hij dit vak doceerde, bleef hij er zich ook verder in ontwikkelen. Tegen het einde van de achttiende eeuw, nam hij zich zelfs voor om een overzichtswerk over de wiskunde te gaan schrijven.
In 1795 ging zijn school failliet. Mede dank zij zijn vriendschap met

Foto: Gemeentelijke Archiefdienst Delft

Jacob de Gelder

de Amsterdamse hoogleraar Jan Hendrik van Swinden (*1746-†1823) slaagde De Gelder er niet alleen in financiëel het hoofd boven water te houden, maar bouwde hij zelfs enige naamsbekendheid op. Zodoende werd hij in 1815 aangesteld als professor in de wiskunde aan de nieuwe Militaire Academie in Delft. Na een paar jaar kwam hij daar in conflict met zijn superieur Johannes H. Voet (*1758-†1832). Deze vond dat De Gelder te veel aandacht schonk aan het wiskundig inzicht, en te weinig rekening hield met de praktijk.
Zijn ontslag van de Militaire Academie in 1819 deed zijn carrière geen kwaad: nog in datzelfde jaar werd hij als buitengewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Leidse universiteit aangesteld en ontving hij de doctorstitel. In zijn positie van buitengewoon hoogleraar maakte hij zich in de jaren 1821-1823 sterk voor het wiskunde-onderwijs aan de Latijnse School te Leiden. In 1824 werd hij tot gewoon hoogleraar benoemd; die post zou hij tot 1840 blijven bekleden.
In 1848 overleed Jacob de Gelder in zijn woonplaats Leiden. Ook nadat hij ten grave was gedragen bleven velen hun waardering voor De Gelder openlijk uitspreken.


ALLEREERSTE GRONDEN

DER

STELKUNST,

TEN GEBRUIKE

DER

LATIJNSCHE SCHOLEN

EN ANDERE

KOLLEGIEN,

DOOR

JACOB DE GELDER,

Hoogleeraar te LEIJDEN.

Tweede Druk.

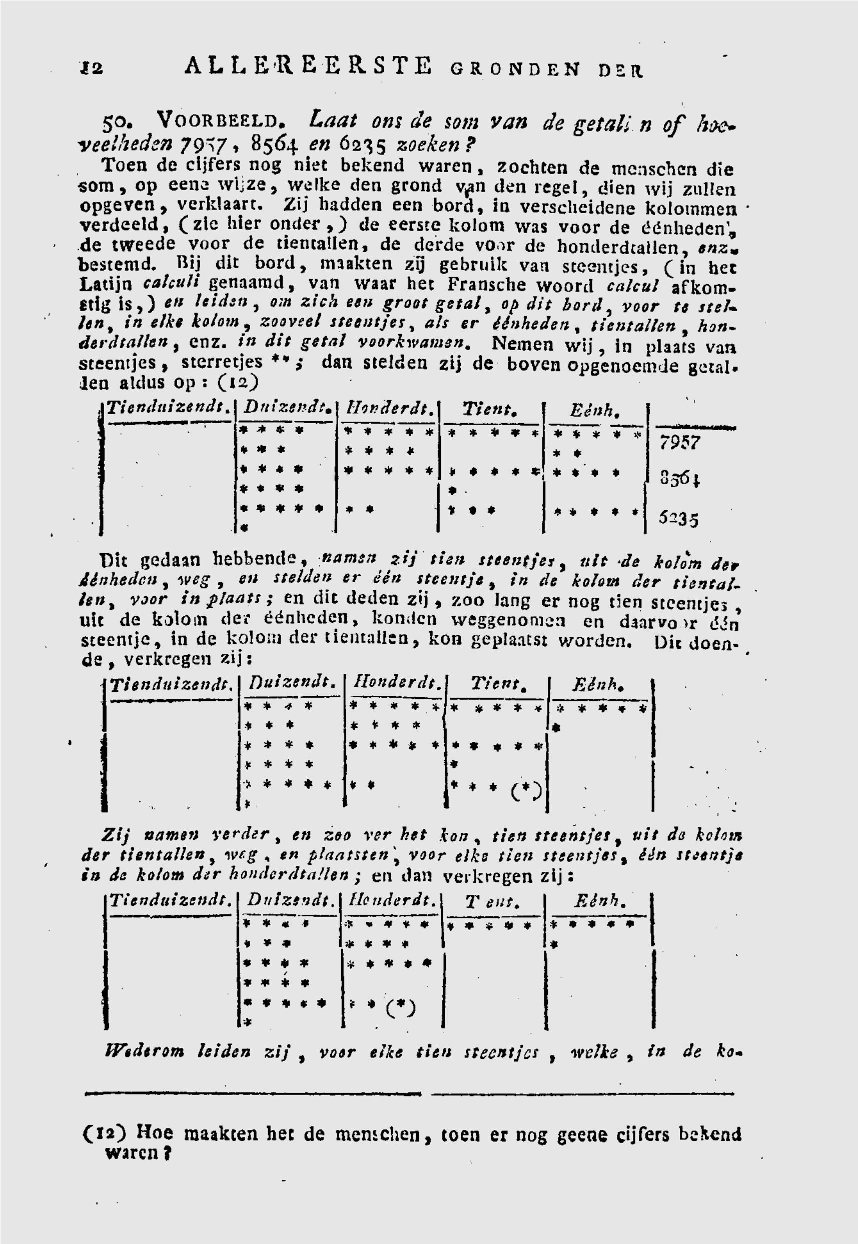
Te 's Gravenhage en Amsterdam,

BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1827.

3. Het doel van De Gelders onderwijs

De Gelder stond in zijn onderwijs een zeer specifiek doel voor ogen: hij was de mening toegedaan dat leerlingen moesten leren redeneren. Hij erkende ook een praktische kant aan het vak dat hij doceerde, maar de praktijk kwam voor hem zeker niet op de eerste plaats. Leren redeneren als een doel voor het wiskunde-onderwijs vond hij veel belangrijker en hij had daarvoor een drietal redenen.
Ten eerste was hij ervan overtuigd dat het gezonde verstand, gesteund door een wiskundige opleiding, de mensheid werkelijk zou Verlichten. De Verlichtingsidealen waren zijns inziens door verkeerde denkwijzen ontspoord en hadden zo tot de Franse revolutie geleid. Wanneer men op basis van een *gezonde philosophie* redeneerde, dan zou dat niet gebeuren[5]. Deze gezonde philosofie kon men door middel van de wiskunde leren; sterker nog: zij werd door de wiskunde bepaald. Wiskunde was dus het aangewezen middel om de wereld te verbeteren.
Ten tweede meende De Gelder dat de achterstand die Nederland ten opzichte van Engeland en Duitsland had opgelopen in de industrie en handel te wijten was aan onvoldoende inzicht van ingenieurs en leidinggevenden in de problemen waarmee zij geconfronteerd werden. Ook dit probleem kon volgens



12 ALLEREERSTE GRONDEN DER

50. VOORBEELD. *Laat ons de som van de getallen of hoeveelheden 7957, 8564 en 6235 zoeken?*

Toen de cijfers nog niet bekend waren, zochten de menschen die som, op eene wijze, welke den grond van den regel, dien wij zullen opgeven, verklaart. Zij hadden een bord, in verscheidene kolommen verdeeld, (zie hier onder,) de eerste kolom was voor de éénheden, de tweede voor de tientallen, de derde voor de honderdtallen, *enz.* bestemd. Bij dit bord, maakten zij gebruik van steentjes, (in het Latijn *calculi* genaamd, van waar het Fransche woord *calcul* afkomstig is,) *en leiden, om zich een groot getal, op dit bord, voor te stellen, in elke kolom, zooveel steentjes, als er éénheden, tientallen, honderdtallen*, enz. *in dit getal voorkwamen.* Nemen wij, in plaats van steentjes, sterretjes **; dan stelden zij de boven opgenoemde getallen aldus op: (12)

Tienduizendt.	*Duizendt.*	*Honderdt.*	*Tient.*	*Eénh.*	
	* * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *	7957
	* * *	* * * *		* *	
	* * * *	* * * * *	* * * * *	* * * *	8564
	* * * *		*		
	* * * * *	* *	* * *	* * * * *	6235
	*				

Dit gedaan hebbende, *namen zij tien steentjes, uit de kolom der éénheden, weg, en stelden er één steentje, in de kolom der tientallen, voor in plaats;* en dit deden zij, zoo lang er nog tien steentjes, uit de kolom der éénheden, konden weggenomen en daarvoor één steentje, in de kolom der tientallen, kon geplaatst worden. Dit doende, verkregen zij:

Tienduizendt.	*Duizendt.*	*Honderdt.*	*Tient.*	*Eénh.*
	* * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *
	* * *	* * * *		*
	* * * *	* * * * *	* * * * *	
	* * * *		*	
	* * * * *	* *	* * * (*)	
	*			

Zij namen verder, en zoo ver het kon, tien steentjes, uit de kolom der tientallen, weg, en plaatsten, voor elke tien steentjes, één steentje in de kolom der honderdtallen; en dan verkregen zij:

Tienduizendt.	*Duizendt.*	*Honderdt.*	*Tient.*	*Eénh.*
	* * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *
	* * *	* * * *		*
	* * * *	* * * * *		
	* * * *			
	* * * * *	* * (*)		
	*			

Wederom leiden zij, voor elke tien steentjes, welke, in de ko-

(12) Hoe maakten het de menschen, toen er nog geene cijfers bekend waren?

De Gelder verholpen worden door meer en beter wiskunde-onderwijs[6]. Ten derde kwam volgens De Gelder de wiskunde veel beter tot zijn recht wanneer men haar begreep: hij was ervan overtuigd dat kennis regelmatig gerepeteerd moest worden om niet verloren te gaan. Alleen wanneer men iets ècht begreep, dan ging dat niet verloren. Redeneringen kon men steeds weer reconstrueren en zodoende kon men *ware kennis* verder uitbouwen, en nooit echt kwijtraken. Leren redeneren was voor De Gelder het belangrijkste doel van het wiskunde-onderwijs.

4. Leren redeneren

De nadruk op dat leren redeneren an sich was niet zo heel nieuw: ook in de achttiende eeuw stak reeds menig wiskundige op deze wijze de loftrompet over zijn vak. Maar toen beschouwde men wiskunde als een mooi voorbeeld van logisch redeneren: dat verdiende navolging, en door het goed te bestuderen kon men de les die uit de wiskunde te leren was in andere vakgebieden implementeren. De Gelder beschouwde wiskunde niet alleen als een mooi voorbeeld dat navolging verdiende, maar legde het wiskundige systeem ten grondslag aan het logisch redeneren: wat logisch was, was wiskunde. Bovendien was de wiskunde als voorbeeld van goede redeneringen volgens achttiende-eeuwse wiskundigen bestemd voor academici. De ingenieurs werden onderwezen in het toepassen van regels waarvan de logica verder niet werd uitgelegd. Voor De Gelder strekte de zegenende werking van de wiskunde zich ook tot hen uit: wiskunde was voor iedereen van nut, die de maatschappij van nut wilde zijn.

Er was nog een tweede verschil tussen De Gelder en zijn achttiende-eeuwse collegae. Dit lag in de opvatting over wat wiskunde nu eigenlijk was. Volgens De Gelder had wiskunde grote invloed op de natuurkunde en de mechanica uitgeoefend. Voor zijn achttiende-eeuwse collegae wàs die natuurkunde en mechanica óók wiskunde. Voor De Gelder had de wiskunde zich in zekere zin losgeweekt van de natuurwetenschappen: zij was belangrijker, de motor achter de natuurkunde. Hij had het dus over een heel ander soort wiskunde dan zijn achttiende-eeuwse collegae.

De Gelders opvattingen vonden steun bij de Nederlandse overheid. Deze sprak zich althans een aantal malen ten gunste van zijn opvattingen uit. Zo werd in 1815 wiskunde een verplicht vak aan de Latijnse scholen. In 1826 werd De Gelders wiskundecursus voor het onderwijs aan deze scholen aanbevolen. In 1843 werd de Polytechnische hogeschool in Delft opgericht met een sterk wiskundige propaedeuse.

Om zijn ideeën te kunnen realiseren schreef De Gelder een aantal wiskundecursussen. De meeste van deze cursussen werden zeer populair en beleefden vele herdrukken. Ondanks het feit dat De Gelder bij iedere leerling (academicus of ingenieur) hetzelfde doel nastreefde schreef hij toch zeer uiteenlopende cursussen. Dit had een praktisch

Korrel

Besluit

Dit is de laatste Korrel die deze jaargang verschijnt. Sommige Korrels roepen reacties op. Daar zijn ze ook voor bedoeld. Uiteraard moeten de Korrels wel over wiskunde en/of over onderwijs gaan.

Meer en meer wordt in Nederland de dienst uitgemaakt door mensen die geen krijt aan de vingers hebben. Men stelt eindtermen en kerndoelen vast, en men produceert verplichte toetsen, waar zogenaamd behoefte aan bestond. Men presenteert dit alles vervolgens als verbeteringen. Dit terwijl lesgevend Nederland aan de zijlijn staat. Er is alleen een summiere inbreng.
Natuurlijk mislukt er het een en ander. Als je méér wilt regelen, kan er méér mis gaan. Dat gebeurt dus ook. Maar lesgevend Nederland laat dit allemaal gebeuren.
Zelden vernemen we de mening van de vakinhoudelijke verenigingen in de pers, terwijl die mening beslist wel eens uiterst gereserveerd is. Er kunnen zelfs vakken in urenaantal worden gehalveerd (zie natuur- en scheikunde voor mavo en vbo), zonder dat het land op zijn kop staat.

Ik zal dit alles voortaan van iets grotere afstand volgen. Ik houd ermee op als hoofdredacteur.
Ik bedank allen die mijn stukjes hebben willen opvatten als opbouwende kritiek. Ik beloof niet dat ik nooit meer een stukje inzend.

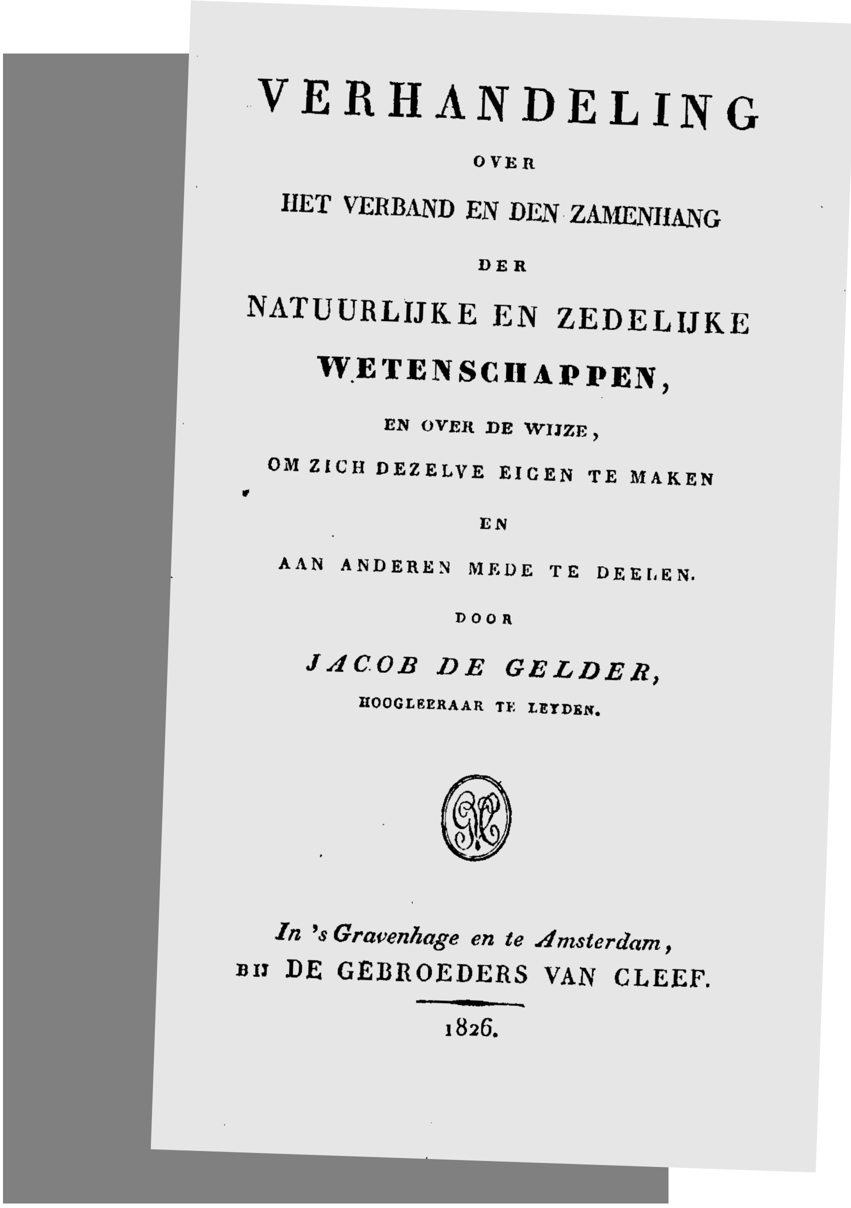
Martinus van Hoorn

oogmerk: De Gelder toetste zijn eigen boeken in de praktijk en zodoende was hij tot de ontdekking gekomen dat niet iedere leerling tot hetzelfde abstractieniveau in staat was. Daarmee hield hij in zijn boeken rekening, zonder toe te geven op de doelen die hij zich gesteld had.

5. De inrichting van De Gelders lessen

Om zijn doel te bereiken hield De Gelder in zijn lessen een strakke indeling aan. Drie van zijn deviezen waren: bied regelmaat, niet te veel stof ineens en voldoende ruimte tot ontspanning. Meer details betreffende de structuur van de les achtte hij overbodig. Uit bronnen is de structuur van De Gelders eigen lessen in twee gevallen bekend: zijn lessen voor de leden van de maatschappij Diligentia in Den Haag (1806-1808) en zijn colleges didactiek van de wiskunde aan universitaire studenten te Leiden (1827-1840).
Zijn leerlingen bij Diligentia – waaronder veel Latijnse scholieren – konden het eerste half uur van de les vragen stellen over het huiswerk van de vorige les. Vervolgens kwam De Gelder met een nieuw stuk stof. Dat werd behandeld en daarover kwamen dan weer nieuwe vragen. De Gelder stelde twee soorten vragen: naast opgaven die met de geboden theorie konden worden opgelost stelde hij ook vragen over de theorie zelf. Op deze manier wilde hij zijn leerlingen dwingen op de theorie te reflecteren[7]. In zijn boeken vinden we deze vragen steeds terug in nootvorm onder aan de pagina: de antwoorden staan meestal letterlijk in de tekst, maar De Gelder wilde niet dat zijn leerlingen een letterlijk antwoord uit de tekst oplepelden: hij wilde dat zij in hun eigen woorden duidelijk maakten wat ze hadden gelezen.

Voor zijn colleges vakdidactiek presenteerde hij iedere les een stelling of probleem na een korte behandeling van de theoretische achtergrond. Vervolgens bood hij zijn studenten de gelegenheid het probleem op te lossen. De behandeling van het probleem gebeurde in de vorm van een klassegesprek. Hierbij wees De Gelder de studenten steeds op hun zwakheden, waaraan ze dan moesten werken voor de volgende les. Tot slot gaf hij een afschrift van de oplossing van het probleem, zodat geen tijd verloren zou gaan aan het dicteren. Elke les behandelde hij op deze wijze een aantal problemen, beginnende met de grondregels van de aritmetica. Daarbij kwam steeds de nadruk te liggen op de manier van presenteren, en het probleem de leerlingen te dwingen om logisch te denken[8]. In al zijn boeken gaf De Gelder didactische tips aan de docenten die ze wilden gebruiken. Behalve de hierboven reeds genoemde zeer algemene deviezen liet hij daarbij de structuur van de lessen in het midden. Hij maakte wel zeer duidelijk dat de kinderen moesten begrijpen wat ze deden: hij vond dat je beter één opgave goed kon uitwerken, dan honderd opgaven volgens een uit het hoofd geleerd regeltje oplossen. Daarbij hechtte hij veel waarde aan individuele begeleiding en klassegesprekken.


VERHANDELING
OVER
HET VERBAND EN DEN ZAMENHANG
DER
NATUURLIJKE EN ZEDELIJKE
WETENSCHAPPEN,
EN OVER DE WIJZE,
OM ZICH DEZELVE EIGEN TE MAKEN
EN
AAN ANDEREN MEDE TE DEELEN.
DOOR
JACOB DE GELDER,
HOOGLEERAAR TE LEYDEN.

In 's Gravenhage en te Amsterdam,
BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.
1826.

6. Individuele begeleiding

De individuele begeleiding bestond bij De Gelder hieruit, dat hij een leerling iedere stap die hij in een rekenproces maakte, nader liet verklaren. Meermalen hamerde De Gelder erop dat het maken van opgaven an sich niet belangrijk was: kinderen konden gemakkelijk vraagstukken leren oplossen, zonder te begrijpen wat ze aan het doen waren, en dat moest te enen male worden voorkomen. Dat kon met behulp van individuele begeleiding. Was de stof eenmaal begrepen dan kon men met behulp van opgaven vingervlugheid krijgen in de toepassing van de uit de theorie voortvloeiende regels. De Gelder hechtte echter meer aan goed begrip, dan aan snelle oplossingen: iedere frase die begon met ‘je moet’ (bijv.: *‘je moet nu met dit vermenigvuldigen’*) was voor De Gelder uit den boze. Om docenten dit ‘moetgedrag’ af te leren en hen te stimuleren hetzelfde bij hun leerlingen te bewerkstelligen schreef hij uitgebreide opgavenboekjes met uitwerkingen in de vorm zoals hij ze wilde zien[9].

7. Klassegesprekken

Klassegesprekken waren volgens De Gelder een goede wijze van herhaling van stof die reeds was bestudeerd. Uit de klassegesprekken leidde De Gelder af hoe goed de leerlingen de stof beheersten. De Gelder schreef een vraag op het bord en liet vervolgens de leerlingen om de beurt een door hem zelf geformuleerde deelvraag beantwoorden. Was het antwoord niet correct, dan wees hij eerst op het goede deel en vroeg vervolgens door tot de leerling zelf met het goede antwoord op de proppen kwam.

§. 42. In de voorſtellen, die wij hier voren (van §. 30 tot §. 37) opgeloſt hebben, ontmoetten wij van de onbekende letters geene andere magten, dan de eerſte, en daarom worden deze voorſtellen gezegd van den *eerſten graad* te zijn: maar wanneer in een voorſtel, behalve de eerſte, ook nog de tweede magt van de onbekende letter voorkomt, zoo ontſtaat daaruit eene vergelijking van den *tweeden graad*, in het algemeen *vierkants vergelijking* genoemd, en het voorſtel wordt alsdan gezegd van den tweeden graad te zijn, of tot de vierkants vergelijking te behooren. De volgende vergelijkingen

$$x^2 + ax = b$$
$$x^2 - ax = b$$

waarin a en b bekende en x het onbekende getal beteekent, zijn vierkants vergelijkingen, of vergelijkingen van den tweeden graad.

§. 43. Om de waarde van x te vinden in eene vergelijking van den tweeden graad, moet men de helft van het getal a, waarmede x vermenigvuldigd is, tot de tweede magt verheffen, en adderen deze tweede magt tot elk lid van de vergelijking; hierdoor verandert de eerſte vergelijking in

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b.$$

en de tweede in

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b.$$

Nu is het eerſte lid van de vergelijking

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b.$$

de tweede magt van $x + \frac{1}{2}a$; want als men $x + \frac{1}{2}a$ tot de tweede magt verheft, verkrijgt men $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$; derhalve

$$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b.$$

Trek uit elk lid van deze vergelijking den vierkanten wortel, zoo heeft men

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$\text{Dus } x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$= -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$$

Het eerſte lid van de vergelijking

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b$$

is de tweede magt van $x - \frac{1}{2}a$; want als men $x - \frac{1}{2}a$ met zich zelf vermenigvuldigt, komt er $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$; derhalve

$$(x - \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b$$

Uit elk lid van deze vergelijking den vierkanten wortel trekkende, zoo heeft men

$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$\text{Dus } x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$= \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$$

299. * Alle meer of min zamengeſtelde vergelijkingen van éene onbekende, welke, door de regels van het II *Hoofdſtuk*, tot den vorm $x^2 + ax + b = 0$ kunnen gebragt worden, zijnde x^2 met het teeken $+$ aangedaan, en a en b getallen, welke van gegevene getallen af hangen, zoodat a en b alle poſitieve en negatieve waarden kunnen hebben, worden *tweede magts, vierkants quadraats vergelijkingen* genoemd.

300. Vraagstuk. *De tweede magts vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ op te loſſen?*

Oplossing. Wanneer men de gegevene vergelijking, door den bekenden term in het achterſte lid te brengen, aldus voorſtelt:

$$x^2 + ax = -b$$

en bedenkt: dat $(x + \frac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ is; dan ziet men: dat, wanneer men bij elk lid dezer vergelijking $\frac{1}{4}a^2$ optelt, het voorſte lid der nieuwe vergelijking

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$

een volkomen vierkant, het vierkant namelijk van $x + \frac{1}{2}a$, zal zijn; terwijl de vorm van het achterſte lid uit de bekende elementen a en b is zamengeſteld. Wij hebben dan eigenlijk

$$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b.$$

Nu zijn de vierkantswortels uit de leden eener vergelijking aan elkander gelijk; maar, daar de vierkantswortel uit eenig getal zoo wel poſitief als negatief kan wezen, kan men de vier volgende vergelijkingen,

$$1^{\circ}.\quad x + \tfrac{1}{2}a = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$
$$2^{\circ}.\quad x + \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$
$$3^{\circ}.\quad -x - \tfrac{1}{2}a = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$
$$4^{\circ}.\quad -x - \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

als zoo veel mogelijke gevolgen van de vergelijking $(x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 - b$ aannemen; omdat de tweede magten van elke dezer vier vergelijkingen wederom de oorſpronkelijke vergelijking voortbrengen; maar, daar de vierde vergelijking uit de eerſte, en de derde uit de tweede, door het omkeeren der teekens, ontſtaat, *zoo is de eerſte vergelijking van de vierde en de tweede van de derde niet te onderſcheiden*; en wij hebben dus ſlechts deze twee eerſte magts vergelijkingen:

$$x + \tfrac{1}{2}a = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)}$$

die uit de gegevene vergelijking $x^2 + ax + b = 0$ volgen en wezenlijk van elkander onderſcheiden zijn.

Uit deze twee vergelijkingen nu volgen onmiddellijk deze twee waarden voor het onbekende getal x; namelijk:

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

die in waarde van elkander onderſcheiden zijn, en welke men gewoonlijk zamenvoegt, door te ſchrijven:

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b)} \quad \ldots\ldots \quad (\Delta)$$

Een aantal elementen van wat wij tegenwoordig een onderwijs-leergesprek noemen was reeds aanwezig. De Gelder liet zijn leerlingen het probleem alleen niet zelf analyseren: hij hakte het voor hen in kleine stukjes en gaf de lijn van de oplossing aan. Die oplossingsstrategie leerden zijn pupillen tijdens de individuele begeleiding. De klassegesprekken dienden als reflectie op de stof voor de leerling, en als controle op het begrip voor de docent. Het taalgebruik was daarbij voor De Gelder heel belangrijk.

8. Taalgebruik

Voor de docent achtte De Gelder het onontbeerlijk dat hij zich van uitermate precies taalgebruik bediende. Hij hamerde er meermalen op dat leerlingen weliswaar niet (althans niet direct) in staat waren om alle taalkundige subtiliteiten te doorzien, maar onduidelijke taal in een vak dat stoelde op exactheid was volgens De Gelder uit den boze. Uitdrukkingen als *'de oppervlakte van een rechthoek is gelijk aan de lengte maal de breedte van de betreffende rechthoek'* was volgens De Gelder onduidelijk. Dit noemde hij een *verkorting*. Volgens hem moest je zeggen: *'als je de getallen die aangeven hoeveel maal de eenheid van de lengtemaat begrepen is in de lengte en de breedte van een rechthoek, vermenigvuldigt, zal het*

product je vertellen hoeveel maal het vierkant op die lengtemaat beschreven op de oppervlakte van de rechthoek past' [10].
Van zijn universitaire studenten eistte hij ook een zeer exact taalgebruik. Nicolaas Beets deed in zijn dagboek verslag van een tentamen dat door De Gelder werd afgenomen. Daarin noemde Beets een getal *'een verzameling van eenheden'*. De Gelder greep in omdat het *'de naam die men aan een verzameling van eenheden geeft'* moest zijn [11]. Van zijn leerlingen verwachtte hij zeer precies taalgebruik, maar hij vond het minstens zo belangrijk dat zij in hun eigen woorden konden uitleggen wat ze hadden geleerd of gedaan. Hij was zich ervan bewust dat ze daarmee in het begin problemen zouden hebben, maar hij had ook de ervaring dat ze snel leerden. Voor De Gelder was de exactheid van het taalgebruik van een leerling een maat voor diens begrip van de stof. Op deze wijze verifiëerde hij het begrip van zijn leerlingen tijdens de klassegesprekken.
Het ingenieursonderwijs wilde De Gelder ook op deze manier inrichten. Hij streefde primair begrip na, want daaruit zou volgens hem de leerling vanzelf de toepassing begrijpen. Hij was zich wel bewust van het lagere niveau van deze leerlingen, en daarom liet hij de exacte bewijzen achterwege en beperkte hij zich tot meer aanschouwelijk onderwijs: de stellingen werden aannemelijk gemaakt door voorbeelden. Het taalgebruik bleef echter zeer precies. Aan de Militaire Academie kwam hij in problemen vanwege zijn visie op het wiskunde-onderwijs. *'Zij spreken onophoudelijk van toepassingen te maken, zonder dat zij mij toeschijnen te weten wat al niet tot het maken van toepassingen vereischt wordt'* schreef hij over zijn tegenstanders in deze. Na een grondige hervorming van de academie – min of meer gevolg van zijn ontslag – kreeg hij alsnog gelijk [12].

9. De Gelders ideeën getoetst aan zijn œuvre

Achttiende-eeuwse wiskundeboekjes voor het middelbaar- en ingenieursonderwijs stonden vol met *algoritmen* die een bepaald soort opgaven oplosten: de leerling werd geleerd een bepaalde *regel* te volgen die de goede uitkomst zou geven. Hetzelfde gold overigens veelal voor algebra-onderwijs aan de universiteit. Algoritmen leken niet thuis te horen in De Gelders didactische opvattingen. Toch stonden ook in zijn boeken veel *regels*, en ze leken erg veel op de *regels* van zijn achttiende-eeuwse collegae.
De Gelders boeken waren op andere punten zeer innovatief: hij werkte alles zeer nauwkeurig uit, en maakt de lezer attent op alle mogelijke valkuilen die hij tijdens het overdenken van de stof zou kunnen tegenkomen. Om de status van al zijn beweringen weer te geven maakte hij gebruik van alle typografische mogelijkheden: kleine lettertjes ter illustratie of nadere uitleg van een oplossing, cursief schrift voor definities en axioma's en verschillende tekens voor de paragrafen gaven aan wat de inhoud van het komende stukje was. Zodoende liet De Gelder niets aan de fantasie van de lezer over: in zijn algebraboek wees hij er bijvoorbeeld met een rekenvoorbeeldje zeer nadrukkelijk op dat algebraïsche en rekenkundige breuken behalve de deelstreep en de naam hoegenaamd niets met elkaar te maken hadden.
Voor het ingenieursonderwijs schreef De Gelder een serie nieuwe meetkundeboeken. Deze waren deels gebaseerd op de *Géométrie descriptive* van Gaspard Monge (*1746-†1818), en voor een ander deel op aanschouwelijk onderwijs. Deze laatste bestonden uit tekenlessen waarin de leerling met de meetkundige figuren vertrouwd kon raken [13]. De Gelder raadde deze cursus ook aan voor de Latijnse school: de leerlingen konden zich dan een voorstelling van zaken maken wanneer ze moesten gaan bewijzen.
De Gelder trachtte in zijn boeken de lezer tot leidraad te zijn: alle fouten die hij leerlingen in zijn lessen had zien maken waren – op de plaats waar hij meende dat het fout was gegaan bij de betreffende leerling – besproken. Zodoende hoopte hij meer duidelijkheid te scheppen. Tevens trachtte hij – o.a. gesteund door de duidelijke status van al zijn beweringen – **nadenken** en **reflectie** te stimuleren. Waarom dan toch *regels*?

10. Regels bij De Gelder

De *regels* dienden in De Gelders boeken een duidelijk doel. De Gelder gaf dat in al zijn voorwoorden ook expliciet aan: ze dienden als samenvatting van hetgeen daarvoor was behandeld. De leerling kreeg met de *regel* een stuk gereedschap in handen waarvan hij niet alleen wist hoe het werkte, maar ook kon vertellen waarom het werkte. Dat de vorm van deze *regels* zo achttiende-eeuws – d.i.: algoritmisch – aandeed valt slechts te verklaren uit het feit dat De Gelder zelf op deze manier les had gekregen. Ondanks al zijn nieuwe ideeën kon De Gelder zich (natuurlijk) niet aan de indrukken van zijn eigen tijd ontworstelen.
De volgorde van presentatie in De Gelders boeken was goed doordacht. Om een voorbeeld te geven: tijdgenoten van De Gelder kenden tweedegraads vergelijkingen bij de introductie vaak slechts één oplossing toe. Vervolgens – vaak pas na een aantal voorbeelden – demonstreerden ze dat als $x^2 = a^2$, ook

best $x = -a$ kon gelden om dan met de tweede oplossing op de proppen te komen [14]. De Gelder behandelde eerst het probleem $x^2 = a^2$ en haalde dit aan bij de oplossing van tweedegraads vergelijkingen, die direct twee oplossingen kregen. Naast het overdenken van de volgorde, koos De Gelder af en toe voor een geheel nieuwe aanpak. In zijn *Cijferkunst* bijvoorbeeld liet De Gelder zich inspireren door de geschiedenis van zijn vakgebied. Hij gebruikte een soort turfmethode om getallen weer te geven: met sterretjes gaf hij aan hoeveel eenheden, tientallen, honderdtallen etcetera in het betreffende getal voorkwamen. Hiermee 'bewees' hij de grondregels van het rekenen.

11. Didactiek als vakgebied

Behalve een hoop wiskundeboeken publiceerde De Gelder ook een boek vrijwel geheel gewijd aan de didactiek van zijn vakgebied: de *Verhandeling over het verband en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen*. Dit boek is de eerste Nederlandse poging tot de opbouw van een consistent didactisch kader voor het wiskunde-onderwijs. Didactisch bewustzijn bestond reeds langer: in de voorredes tot achttiende-eeuwse wiskundeboeken stonden regelmatig beweringen die wezen op een didactisch bewustzijn [15]. Ook De Gelder schreef didactische tips in de voorredes van zijn boeken. Daarnaast verhief hij die didactiek uit de voorredes tot een zelfstandig aandachtsveld.
In zijn *Verhandeling* werkte hij bijvoorbeeld een groot aantal klassegesprekken – zoals hij zich die idealiter voorstelde – uit. De *Verhandeling* gebruikte hij bij zijn colleges vakdidactiek aan de Leidse universiteit. Ook deze colleges waren aan De Gelders geest ontsproten: hij had er bij de regering op aangedrongen dergelijke colleges te verplichten voor docenten wiskunde. Het onderschrijft nog eens de waarde die De Gelder aan de didactiek hechtte; de colleges didactiek van de wiskunde – sinds 1827 verplicht voor toekomstige docenten – zijn zonder meer uniek te noemen. Zij illustreren de groei van een didactisch bewustzijn naar een didactiek als zelfstandig onderzoeksveld.

12. Slot

Regelmatig had De Gelder in zijn leven te maken met mensen die het niet eens waren met zijn standpunt over het nut van wiskunde-onderwijs. Wiskunde was een nieuw vak aan de Latijnse scholen en werd niet overal zonder slag of stoot geaccepteerd. Ook de vorm waarin het wiskunde-onderwijs aan de ingenieursscholen moest worden gegoten stond ter discussie: praktisch denken stond tegenover de visie van De Gelder, die wilde dat zijn leerlingen van wiskunde betere (lees: intelligentere) mensen werden. Bezien in het licht van de huidige discussie over de plaats van het wiskundeprogramma binnen het middelbaar onderwijs, maakt dat De Gelders ideeën wederom zeer actueel.

1 Verdam, G.; 'Het leven van den hoogleeraar Jacob de Gelder' uit: *Algemeene Konst- en Letterbode* 1848 (nr.2) p. 307

2 Zie: *Verslag van den staat des Gymnasiums*; Groningen (1861), p. 4 (overlijdingsbericht Pantekoek).

3 Beckers, D.; 'Jacob de Gelder en de wiskundige ideologie in Nederland (1800-1840)' in: *Gewina* **19**-1

4 Een uitgebreide biografie van De Gelder zal onder de titel 'Mathematics as a way of life' in de loop van 1996 in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verschijnen.

5 Gelder, J. de; *Ludeman in zijn waar karakter*, Rotterdam (1801), pp. IX-XII.

6 Gelder, J. de; *Redevoering, uitgesproken bij de opening van het Industrie-Kollegie*; Leiden (1827), pp. 7-8.

7 P. Uylenbroeck, 'De wiskundelessen bij Diligentiâ' in: *Algemeene Konst- en Letterbode* II (1806), pp. 228-233; dit artikel betreft een – overigens zeer gunstige – recensie van De Gelders lessen.

8 Archief U.B. Leiden, nummer AC II 95, dossier 178

9 Gelder, J. de; *Uitgewerkte oplossingen der CCL vraagstukken voorkoomende in de allereerste gronden der stelkunst*; Den Haag/Amsterdam (1826, 1837[2]) en Rademakers, Gs.; *Antwoorden op de rekenkundige vragen, voorkomende in de allereerste gronden der cijferkunst door Jacob de Gelder*; Den Haag/Amsterdam (1825, 1833[2])

10 Gelder, J. de; *Uitgewerkte oplossingen van de CCL vraagstukken…*; Den Haag/Amsterdam (1837[2]), pp. XXII-XXIII

11 Gelder, H. van; *Hildebrands voorbereiding: de dagboeken van de student Nicolaas Beets*, Den Haag (1956)

12 Janssen, J.; *Op weg naar Breda*; Den Haag (1989)

13 Gelder, J. de; *Inleiding tot de beschouwende en werkdaadige meetkonst*; Amsterdam (1806) en Gelder, J. de; *Allereerste gronden der beschouwende en werkdadige meetkunst*; Amsterdam / Den Haag (1816, 1827[2]). De Gelders tekenlessen zijn gepubliceerd in: Gelder, J. de; *Handleiding tot het meetkunstig teekenen*; Den Haag / Amsterdam (1829)

14 Dit is een nawee van de meetkundige achtergrond waartegen de algebra zich lange tijd heeft afgespeeld. Aangezien een getal door een lijnstuk werd voorgesteld kon het niet negatief zijn. Uit het feit dat uit $x^2 = a^2$ (met $a > 0$) ook $x = -a$ kon volgen blijkt echter dat deze volgorde op dit moment min of meer rudimentair van karakter was: De Gelder had de moeite genomen om over de volgorde na te denken, en veel van zijn tijdgenoten niet.

15 Beckers, D.; 'Meetkunde-onderwijs in achttiende-eeuws Nederland' in: *de Nieuwe Wiskrant* 15-3 (maart 1996)