Ben Moonen
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
b.moonen@science.ru.nl

Evenement Fieldsmedaille 2018

Fieldsmedaille voor Peter Scholze

Op 1 augustus 2018 werden in Rio de Janeiro de Fieldsmedailles uitgereikt tijdens het vierjaarlijkse International Congress of Mathematicians. Een van de winnaars was de toen nog dertigjarige Duitser Peter Scholze van de universiteit van Bonn. In dit artikel legt Ben Moonen uit wat er zo bijzonder is aan het werk van deze jonge wiskundige ster.

Eenendertig is hij nu, en zijn prijzenkast puilt uit. Een keer zilver, drie keer goud op de IMO. Op zijn vierentwintigste benoemd tot hoogleraar in Bonn, Cours Peccot in 2012, SASTRA Ramanujan Prize in 2013, Clay Research Award in 2014, de Frank Nelson Cole Prize in Algebra en de Ostrowski Prize in 2015. In 2016 de Prix Fermat, de EMS Prize en, als jongste ooit, de Leibniz-Preis. In datzelfde jaar bedankte hij voor Mark Zuckerbergs 'New Horizons in Mathematics Prize'. Afgelopen zomer dan — weinig verrassend — de Fieldsmedaille. Peter Scholze (Dresden, 11 december 1987) is een fenomeen, zoveel is wel duidelijk. Maar wat is er dan zo bijzonder aan zijn werk? En hoe ziet de toekomst eruit, als je op zo'n jonge leeftijd al zoveel onderscheidingen hebt ontvangen?

Heinrich-Hertz-Gymnasium

De middelbare school die Scholze bezocht, het Heinrich-Hertz-Gymnasium in Berlijn, heeft een uitzonderlijke staat van dienst als het gaat om het afleveren van algebraïsch meetkundigen. Behalve Scholze bezochten ook de wiskundigen Altmann, Huybrechts, Rapoport, Schmidt en Tschinkel allemaal deze school.

Al op jonge leeftijd volgde Scholze wiskunde-colleges aan de Humboldt-universiteit. Toen zijn leraren het gevoel kregen hem daarin niet verder te kunnen begeleiden, werd Klaus Altmann gevraagd de rol van mentor van Scholze op zich te nemen. Ten tijde van zijn eindexamen, in 2007, was Scholze al op hoog niveau ingewerkt in de algebraïsche meetkunde.

Altmann was zelf circa twintig jaar eerder begeleid door Michael Rapoport. Mede omdat Scholzes wiskundige interesses veel raakvlakken hadden met het werk van Rapoport, gaf Altmann hem het advies om in Bonn bij Rapoport te gaan studeren. Onder diens hoede is Scholze in korte tijd door het bachelor- en masterprogramma geloodst, om vervolgens binnen twee jaar te promoveren.

Op zijn tweeëntwintigste breekt Scholze door met een nieuw bewijs van het locale Langlands-vermoeden voor GL_n dat gebaseerd is op een precieze meetkundige bestudering van bepaalde Shimura-variëteiten. Hier kan je de invloed van Rapoport — een van de grote experts in de gebruikte technieken — in herkennen. Dat is minder het geval bij het artikel 'Perfectoid spaces', ingediend op zijn vierentwintigste verjaardag, waarmee Scholze zich definitief heeft waargemaakt als een wiskundige ster. Dit werk heeft juist veel raakvlakken met dat van de enige andere Duitse Fieldsmedaillist, Gerd Faltings, die ook in Bonn werkzaam is maar dan aan het Max-Planck-Institut. Alhoewel Faltings en Scholze relatief weinig persoonlijke interactie schijnen te hebben, zijn het juist een aantal thema's uit het werk van Faltings die een hoofdrol spelen in Scholzes werk van de afgelopen jaren.

Frisse kijk

Een van de punten waarop Scholze zich onderscheidt, is zijn vermogen om van de gebaande paden af te wijken. Combineer dat met zijn fenomenale wiskundige talent en je krijgt verrassende resultaten.

Een illustratie hiervan is te vinden in de algebra die in Scholzes werk een rol speelt. In de ringentheorie wordt een commutatieve ring R *noethers* genoemd (naar Emmy Noether, 1882–1935) als elk ideaal $I \subset R$ voortgebracht kan worden door een eindig aantal elementen. Een intuïtie daarbij is dat niet-noetherse ringen 'groot' zijn, waardoor sommige argumenten niet meer werken. De standaardboeken over ringentheorie staan vol resultaten die alleen gelden voor noetherse ringen, en als gevolg daarvan groei je op met het idee dat je niet-noetherse ringen maar beter kan vermijden.

Zo niet Scholze. Hij trekt zich niet veel aan van de gangbare waarschuwingsbordjes, en weet, door op de juiste manier ook heel grote ringen toe te laten, controle te krijgen over dingen die eerder problematisch leken. Een voorbeeld daarvan is zijn werk met Bhargav Bhatt over de pro-étale topologie. Het is misschien niet eens een van zijn belangrijkste bijdragen, maar het illustreert hoe een paar jonge jongens de boel op stelten kunnen zetten.

Het probleem is gemakkelijk te schetsen. Grothendieck en zijn school ontwikkelden in de jaren zestig étale cohomologie, met als een van de drijfveren de Weil-vermoedens. De eerste delen van deze ver-

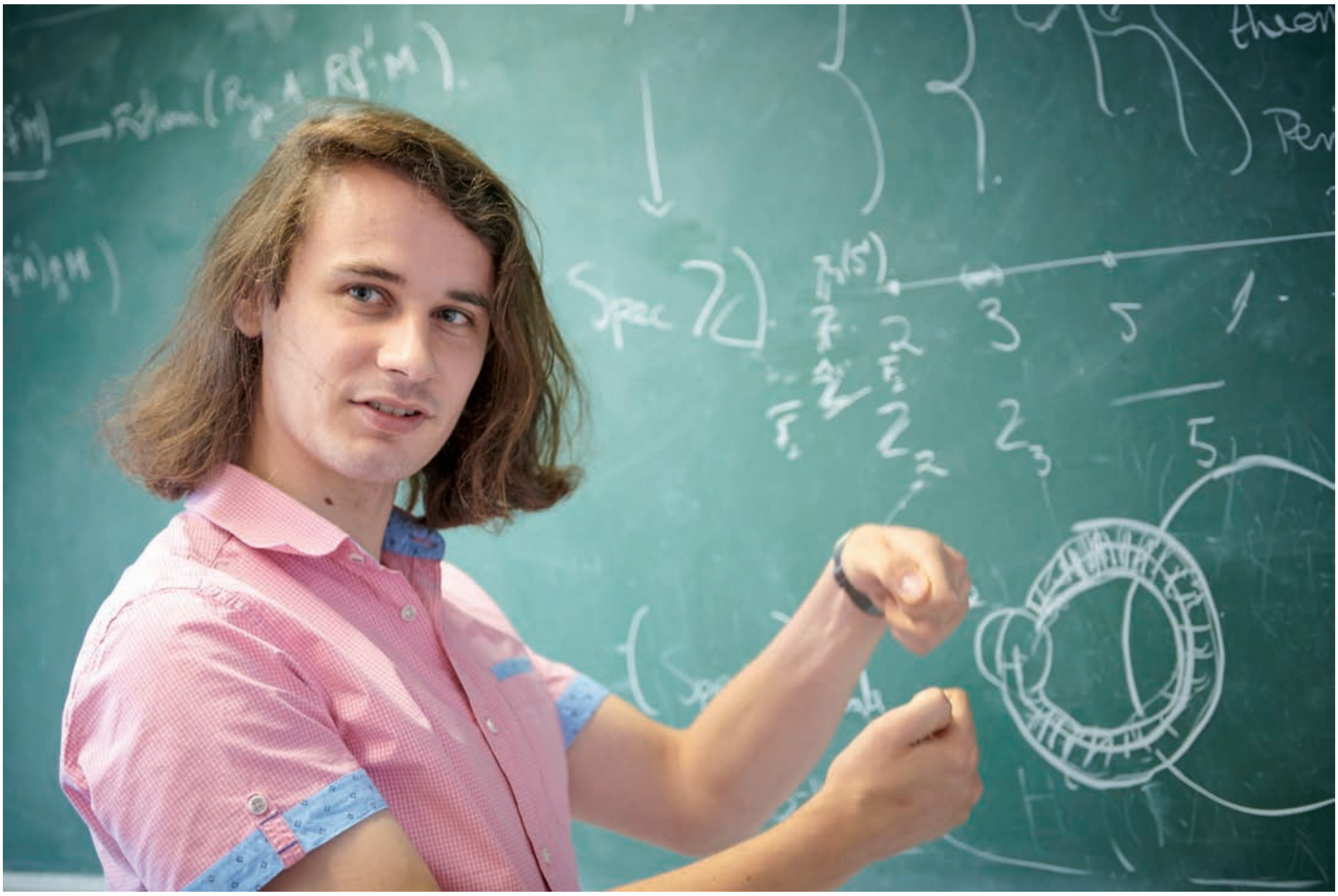

Foto: Volker Lannert/University of Bonn

Peter Scholze

moedens zijn bewezen door Dwork en Grothendieck. De laatste en moeilijkste uitspraak, over de eigenwaarden van Frobenius, is een van de grote triomfen van Deligne. De bewijzen maken gebruik van ℓ-adische cohomologie, een theorie die aan een variëteit X over een lichaam k een rij cohomologiegroepen $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ toevoegt. Deze cohomologiegroepen zijn vectorruimten over het lichaam $\mathbb{Q}_\ell$ der ℓ-adische getallen, waarbij ℓ een priemgetal is ongelijk aan de karakteristiek van k. (Het is gebruik om het coëfficiëntenlichaam $\mathbb{Q}_\ell$ te noemen en niet $\mathbb{Q}_p$; dit omdat de letter p meestal al gereserveerd is voor de karakteristiek van k.) Klein probleem: het lukt(e) niet om deze cohomologiegroepen *rechtstreeks* te definiëren. De Grothendieck-topologie die gebruikt wordt (de étale topologie) is eigenlijk alleen geschikt om overdekkingen te bestuderen die bepaalde eindigheidseigenschappen hebben. Als gevolg daarvan heeft alleen cohomologie met coëfficiënten in een eindige ring alle gewenste eigenschappen. Zodoende wordt $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_\ell)$ gedefinieerd als limiet van cohomologiegroepen $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$, om vervolgens de cohomologie met $\mathbb{Q}_\ell$-coëfficiënten te definiëren als $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell) = H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Het werkt wel, maar het onderliggende mechanisme kende problemen die alleen met enige kunstgrepen (waarvoor varianten bestaan van Deligne, Ekedahl en Jannsen) te omzeilen waren.

Vijftig jaar nadat Grothendieck zijn SGA4-seminarium hield, doen Bhatt en Scholze iets waarmee ze het hele probleem in een klap van tafel vegen. Door op een beheerste manier de topologie wat fijner te maken — wat op het niveau van algebra betekent dat je bepaalde limieten toevoegt, die typisch grote, niet-noetherse ringen zijn — creëren ze precies genoeg flexibiliteit om $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ gewoon te kunnen definiëren als cohomologie van een schoof $\mathbb{Q}_\ell$, en verkrijgen ze een goede afgeleide categorie die alle gewenste eigenschappen heeft (Grothendiecks 'zes functoren') zonder dat er pathologische verschijnselen optreden. Verbluffend.

Perfectoïde ruimten

Het werk van Scholze is nu al te omvangrijk (en te technisch) om er hier een samenvatting van te kunnen geven. Om toch een beeld te geven van zijn bijdragen, beperken we ons hier tot het door hem ingevoerde begrip *perfectoïde* ruimte}, hoewel Scholze sedertdien alweer vele nieuwe resultaten heeft bewezen. (Zoals vermeld aan het eind van het artikel van Bas Edixhoven in dit nummer, is er de hoop dat nieuw werk van Scholze gezamenlijk met Laurent Fargues een grote doorbraak zal geven in het lokale Langlands-vermoeden; dat zou een enorme mijlpaal zijn.)

Perfectoïde ruimten vormen een speciale klasse van adische ruimten. (Zie het kader over p-adische meetkunde.) Het meest frappante aan Scholzes theorie is dat deze een volkomen nieuwe brug slaat — de zogeheten *tilting-equivalentie* — tussen meetkunde in karakteristiek 0 en in karakteristiek p. Scholze heeft hier zelf een prachtige toepassing van gegeven op het zogeheten *gewicht-monodromie-vermoeden*, een belangrijk probleem in de aritmetische meetkunde. (De betekenis van de term 'tilting' is hier een andere dan die in de representatietheorie van Artin-algebra's.)

Het 0-dimensionale geval van deze tilting-equivalentie kan plausibel gemaakt worden door op te merken dat er een analogie is tussen $\mathbb{Q}_p$ en het lichaam $\mathbb{F}_p((t))$ van Laurentreeksen met coëfficiënten in $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, waarbij $p \in \mathbb{Q}_p$ de evenknie is van $t \in \mathbb{F}_p((t))$. Immers, een p-adisch getal x kan geschreven worden als

$$x = \sum_{i=-m}^{\infty} x_i \cdot p^i$$

met $x_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ voor alle i. Je zou aan het rijtje $(\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,\ldots)$ kunnen denken als een soort 'decimale expansie' van x, met dien verstande dat de decimalen nu van rechts naar links lopen. (Een p-adisch geheel getal x is een rijtje met $x_i = 0$ voor alle $i < 0$.) Maar feitelijk zijn $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{F}_p((t))$ natuurlijk heel verschillende lichamen; de eerste heeft karakteristiek 0, de tweede karakteristiek p.

De analogie wordt echter een precies resultaat op het moment dat we aan beide lichamen alle p^e-machts wortels uit p (respectievelijk t) toevoegen: voor de lichamen

$$L = \bigcup_{n>0} \mathbb{Q}_p(\sqrt[p^n]{p}), \quad L^\flat = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_p((\sqrt[p^n]{t})),$$

geldt:

Stelling (Fontaine–Wintenberger). *De absolute Galoisgroepen van L en $L^\flat$ zijn isomorf:*

$$\mathrm{Gal}(\bar{L}/L) \cong \mathrm{Gal}(\bar{L}^\flat/L^\flat).$$

Hetzelfde resultaat geldt als we L vervangen door zijn p-adische completering K en $L^\flat$ door zijn completering $K^\flat$.

De theorie van perfectoïde ruimten kan worden gezien als een (zeer) vergaande generalisatie hiervan. Scholze definieert perfectoïde ruimten als een speciale klasse van adische ruimten. Lokaal worden deze gegeven door complete Banach-algebra's die voldoen aan een aantal voorwaarden. De lichamen K en $K^\flat$ zijn voorbeelden hiervan. Via een constructie van Fontaine kan je, met K en $K^\flat$ als hiervoor, aan een perfectoïde K-algebra R een perfectoïde $K^\flat$-algebra $R^\flat$ associëren. Scholze bewijst dat dit leidt tot een equivalentie van categorieën $X \mapsto X^\flat$ tussen perfectoïde ruimten over K en perfectoïde ruimten over $K^\flat$. Bovendien blijkt de topologie van X 'dezelfde' te zijn als die van $X^\flat$, op twee niveaus: letterlijk (X en $X^\flat$ hebben homeomorfe onderliggende ruimten) maar ook — veel belangrijker — is het waar dat de étale-site van X equivalent is met die van $X^\flat$, wat zoiets betekent als dat voor alle aspecten die te maken hebben met overdekkingen de twee kanten dezelfde structuur hebben.

Dat dit meer is dan een formeel spelletje wordt duidelijk als men bedenkt dat meetkunde in karakteristiek p veel profijt heeft van het feit dat in principe alle objecten een extra soort symmetrie hebben, gegeven door een Frobenius-morfisme. Via tilting kun je informatie uit karakteristiek p ineens 'overhevelen' naar p-adische lichamen, of ringen van gemengde

p-Adische meetkunde

Zoals gememoreerd in de bijdrage van Bas Edixhoven over Robert Langlands, is elke niet-triviale absolute waarde op $\mathbb{Q}$ equivalent met ofwel de 'gewone' absolute waarde $|\cdot|$, of met een p-adische absolute waarde $|\cdot|_p$ voor een priemgetal p. De completering van $\mathbb{Q}$ met betrekking tot $|\cdot|$ geeft de reële getallen $\mathbb{R}$; de completering met betrekking tot $|\cdot|_p$ geeft het lichaam $\mathbb{Q}_p$ der p-adische getallen. Over $\mathbb{R}$, of zijn uitbreiding $\mathbb{C}$, is er een zeer vruchtbaar samenspel tussen algebraïsche en analytische technieken in de meetkunde. Op soortgelijke manier zouden we over $\mathbb{Q}_p$, of lichaamsuitbreidingen daarvan, ook willen beschikken over een goede *analytische* theorie die een aanvulling geeft op de algebraïsche meetkunde.

Van meet af aan is duidelijk geweest dat zo'n theorie van enorm belang zou zijn, maar het ontwikkelen hiervan heeft veel voeten in de aarde gehad. In zijn simpelste vorm gesteld is het probleem dat de p-adische absolute waarde — anders dan de gewone absolute waarde — voldoet aan de sterke (niet-archimedische) driehoeksongelijkheid

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

hetgeen als gevolg heeft dat

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

een open en gesloten deelring is van $\mathbb{Q}_p$ (de deelring van p-adisch gehele getallen) en dat $\mathbb{Q}_p$ volledig onsamenhangend is in de p-adische topologie. Als we, met het oog op het ontwikkelen van analytische meetkunde, willen definiëren wat het analogon is van een holomorfe functie op $\mathbb{Q}_p^n$, dan zien we dat een naïeve imitatie van het klassieke begrip, namelijk: functies die overal *lokaal* gegeven kunnen worden door een convergente machtreeks, veel te veel 'holomorfe' functies zou opleveren om bruikbaar te kunnen zijn.

Een andere aanpak is dus nodig. De zoektocht naar een goed werkende p-adische analytische meetkunde heeft in feite meerdere theorieën voortgebracht; deze kunnen weliswaar met elkaar vergeleken worden maar er is nog niet één enkele theorie die als 'beste' gezien kan worden. De theorie van *rigide ruimten* is het oudst. Het werk van John Tate (Abelprijs 2010) uit de jaren zestig vormt het fundament hiervoor. Zoals de in 2018 overleden wiskundige Michel Raynaud heeft laten zien, hebben rigide ruimten een directe relatie met de theorie van formele schema's. Een andere benadering is de rond 1990 door Vladimir Berkovich ingevoerde theorie van *Berkovich-ruimten* die in zekere zin makkelijkere topologische eigenschappen hebben. Kort daarna is de aanpak van Berkovich gegeneraliseerd door Roland Huber in zijn theorie van *adische ruimten*; in deze theorie is men aan minder sterke eindigheidscondities gebonden.

Afgelopen jaar is er een eerste boek verschenen van Kazuhiro Fujiwara en Fumiharu Kato, die een nieuwe kijk geven op de theorie van rigide ruimten door systematisch de rol van de geassocieerde Zariski–Riemann-ruimte te benadrukken. Het fijne hiervan is dat dit tot op zekere hoogte een unificatie geeft van de verschillende theorieën, maar men moet zich wel realiseren dat de stapel literatuur inmiddels tot indrukwekkende proporties is uitgegroeid. (In [3], dat ver over de 800 pagina's beslaat en dat is bedoeld als eerste boek in een reeks, worden slechts de eerste twee hoofdstukken van de theorie behandeld.)

karakteristiek, zoals $\mathbb{Z}_p$. En Scholze is niet de enige die met deze technieken mooie stellingen heeft bewezen; zo heeft bijvoorbeeld Yves André [1] met perfectoïde technieken een bekend vermoeden van Hochster in de commutatieve algebra bewezen dat al sinds begin jaren zeventig open was.

Directeur MPIM

Afgelopen voorjaar is Scholze benoemd tot directeur van het Max–Planck–Institut für Mathematik (MPIM) in Bonn. Ik maakte deel uit van een panel dat advies moest uitbrengen over zijn geschiktheid voor deze taak. Heel plechtig werd door de voorzitter de vraag op tafel gelegd of de kandidaat wel de vereiste wetenschappelijke statuur heeft. Lang hebben de discussies daarover niet geduurd. Een dozijn aanbevelingsbrieven van topwiskundigen (waaruit ik hier graag had willen citeren) maakten ons het werk al helemaal gemakkelijk.

Voor het MPIM lijkt het aantreden van Scholze op precies het goede moment te komen, aangezien drie van de zittende directeuren (Ballmann, Faltings en Zagier) dicht bij hun pensionering zitten. Scholze, die een toegankelijke persoon is en die in staat is om veel mensen om zich heen te verzamelen, lijkt ook de juiste persoon om het MPIM een nieuwe impuls te geven. Samen met de recent bekrachtigde verlenging van het Hausdorff Center for Mathematics als *Exzellenzcluster* heeft Bonn de wind weer in de zeilen.

De vraag die links en rechts gesteld wordt is of Scholze er wel goed aan doet om zo'n functie op zich te nemen. Het komt er natuurlijk op aan hoe je dit directeurschap invult. Zowel het MPIM als Scholze zelf snappen wel dat het een verkwisting van talent zou zijn om Scholze met administratief werk op te zadelen. Anderzijds zal Scholze nog meer dan hiervoor een centrale figuur worden van een van de belangrijkste Europese fora van de wiskunde, wat ook voor zijn eigen onderzoek stimulerend zal zijn.

De toekomst

Scholze lijkt zich sterk bewust van de rol die hij in de wiskunde kan spelen, en van wat er nodig is om anderen te bereiken. Hij investeert er veel in om zijn ideeën op anderen over te dragen, door lezingenreeksen te geven of overzichtsartikelen te schrijven. Tegelijk heeft hij een sterke drang naar voren. Zijn rol is die van een vernieuwer. Hij zou nog vele jaren kunnen vullen met het verder oppoetsen van wat hij nu al heeft gedaan, maar daar ligt duidelijk niet zijn ambitie. Bij zijn interview met het adviespanel voor het MPIM maakte hij grote indruk met een ambitieus programma voor de komende jaren. Hij wil een theorie ontwikkelen van *shtuka's* over getallenlichamen, met toepassingen op het globale Langlands-vermoeden. Hoe zo'n theorie eruit moet zien weet hij ook nog niet, maar de eerste puzzelstukjes beginnen al bij elkaar te komen. Zijn artikel [7] voor het ICM 2018 is indrukwekkend en laat zien dat hij groots durft te denken.

Maar stel je bent eenendertig en de prijzenkast puilt uit. Is het evident dat dat stimulerend is voor je loopbaan? Het lukt Scholze om niet naast zijn schoenen te gaan lopen, dat is al een goed begin. De media-aandacht probeert hij ook een beetje te ontlopen. Het valt te hopen dat hij genoeg tijd houdt om zich met zijn eigen ideeën af te zonderen. Ik vind dat Scholze en de mensen in Bonn om hem heen dat tot nu toe heel verstandig hebben aangepakt. Rapoport verwoordt het zo dat wat hij het belangrijkste vindt voor een wetenschapper, is om een lange en succesvolle loopbaan te hebben, waarmee hij de opwinding rondom de Fieldsmedaille wat lijkt te willen relativeren. En Scholze zelf: "Mit der mathematischen Forschung habe ich doch gerade erst angefangen." Ik wens het hem, en de wiskunde, toe dat hij er nog veel moois aan mag toevoegen.

Verder lezen

Voor wie een algemeen beeld wil krijgen van de persoon Scholze en zijn werk, zonder veel technische details, zijn er op het internet allerlei populair-wetenschappelijke artikelen te vinden. Ook zijn er verschillende korte artikelen verschenen in de tijdschriften van wiskundige genootschappen; zie bijvoorbeeld het artikel van Bhatt [2] in de *Notices of the AMS*, van Le Stum [4] in de *Gazette des mathématiciens* en het korte artikel van Wedhorn [9] in de *Mitteilungen der DMV*.

Er zijn ook diverse teksten en andere bronnen waarin geprobeerd wordt om wat dieper in te gaan op de hoofdthema's van Scholzes werk. Zo is er een inleidend artikel over perfectoïde ruimten van Scholze zelf [5] en zijn er lecture notes over p-adische meetkunde van Scholze en Weinstein [8]. De Arizona Winter School 2017 ging over perfectoïde ruimten; de voordrachten en veel interessant materiaal zijn te vinden op http://swc.math.arizona.edu/aws/2017/index.html. Van Weinstein [10] is er een inleidend artikel over reciprociteitswetten en Galois-representaties waarin enkele van Scholzes resultaten aan bod komen, en dan zijn we alweer dicht in de buurt gekomen van de bijdrage van Bas Edixhoven in dit nummer. Last but not least zijn er twee prachtige ICM-bijdragen van Scholze zelf [6,7].

Referenties

1 Y. André, La conjecture du facteur direct, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 127 (2018), 71–93.

2 B. Bhatt, What is... a perfectoid space? *Notices Amer. Math. Soc.* 61(9) (2014), 1082–1084.

3 K. Fujiwara en F. Kato, *Foundations of Rigid Geometry, I*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society, 2018.

4 B. Le Stum, Raconte-moi... un perfectoïode, *Gaz. Math.* 154 (2017), 60–64.

5 P. Scholze, Perfectoid spaces: A survey, in *Current Developments in Mathematics 2012*, International Press, 2013, pp. 193–227.

6 P. Scholze, Perfectoid paces and their applications, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians – Seoul 2014*, Vol. II, Kyung Moon Sa, 2014, pp. 461–486.

7 P. Scholze, p-adic geometry, to appear in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians – Rio de Janeiro 2018*, World Scientific, 2019.

8 P. Scholze en J. Weinstein, Berkeley lectures on p-adic geometry, preprint, 2018.

9 T. Wedhorn, Über einige Aspekte der Arbeit von Peter Scholze, *Mitteilungen der DMV* 26(2-3) (Sept. 2018), 76–79.

10 J. Weinstein, Reciprocity laws and Galois representations: recent breakthroughs, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 53(1) (2016), 1–39.