

## PDF hosted at the Radboud Repository of the Radboud University Nijmegen

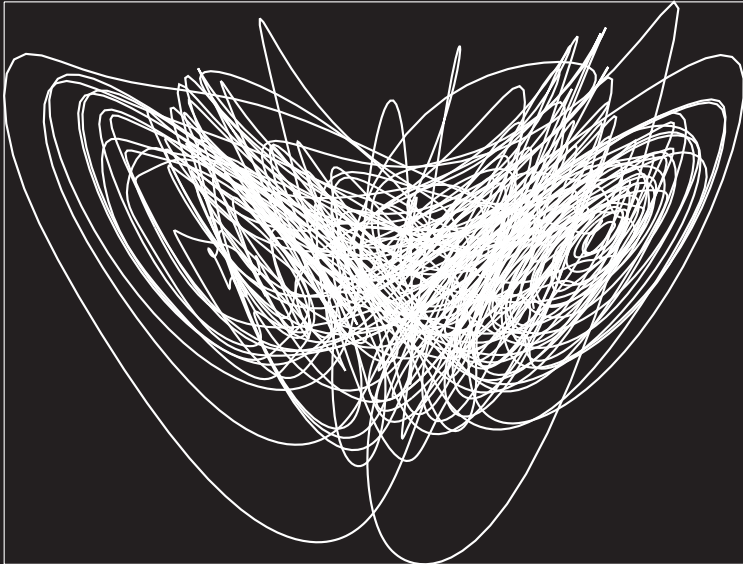
The following full text is a publisher's version.

For additional information about this publication click this link.

<http://hdl.handle.net/2066/19067>

Please be advised that this information was generated on 2021-10-19 and may be subject to change.

# Stroming in wanorde



Willem van de Water

ISBN 90-9014666-0

# Stroming in Wanorde

rede (in verkorte vorm) uitgesproken  
bij de aanvaarding van het ambt  
van bijzonder hoogleraar  
in de stromingsleer  
aan de Faculteit der Natuurwetenschappen,  
Wiskunde en Informatica  
vanwege de Stichting Nijmeegs Universiteitsfonds (SNUF)  
aan de Katholieke Universiteit Nijmegen  
op vrijdag 23 februari 2001

door

dr. ir. Willem van de Water



Katholieke *Universiteit* Nijmegen

---

© 2001 Willem van de Water

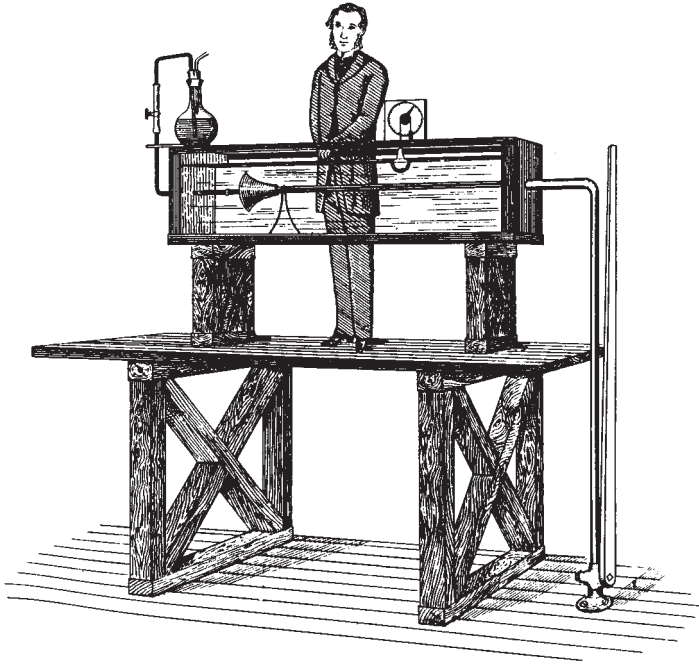
*vormgeving: Macx Reclamestudio, Nijmegen*

*Mijnheer de Rector Magnificus,  
Dames en heren,*

stromingen zijn alomtegenwoordig. Zojuist hebt U zich op de fiets tegen de wind in geworsteld om deze lezing bij te wonen; gisteren boog U zich extra diep op de schaats om uw stromingsweerstand te verminderen. Al die stromingen zijn turbulent: hoewel U met een constante snelheid fietste, kolkte en wervelde de stroming op een rusteloze manier achter U aan. Turbulent staat tegenover laminair: gelaagd en geordend. U kent laminaire stromingen van het schenken van stroop. De vraag is wanneer en waarom stromingen spontaan turbulent worden. Een filosofische vraag is naar het wezen van turbulentie. U zult daar vast een antwoord op hebben in het licht van de turbulentie van het bestaan, net zo goed als U straks iets kunt zeggen vanuit huiselijke sfeer over de aard van chaos. Ik vertel U nu mijn antwoorden, na afloop vertelt U mij de Uwe.

De vraag naar het wanneer komt aan de orde in het experiment dat [Osborne Reynolds](#) in 1883 beschreef.<sup>1</sup> Reynolds, een professor in de ingenieurswetenschappen in Manchester, bestudeerde de stroming van water door een buis. Hij wist, zoals U wellicht ook weet, dat bij lage snelheid de stroming geordend is. Er is echter een kritische snelheid waarboven de stroming onregelmatig wordt. Reynolds wilde dat illustreren in een experiment dat nog steeds te zien is in Manchester.

We zien een mistroostig kijkende inwoner van de 19e eeuw met een experiment dat ook een eeuw eerder niet misstaan had. Stroming van water door een buis? Had Reynolds niets beters te doen? Stroming van water door een buis steekt wat pover af bij de hoogtepunten van de natuurkunde aan het einde van de 19e eeuw:



**Figuur 1.** Het experiment van Osborne Reynolds met een onbekende onderzoeker

de theorie van het electromagnetische veld door Maxwell en de experimenten van Hertz, de statistische natuurkunde door Boltzmann, de wiskunde van de hemeldynamica van Poincaré en de dageraad van de quantumtheorie. Is stromingsleer wel natuurkunde, is het wel een vak dat het waard is om onderwezen te worden aan een algemene universiteit? Kunnen we het niet beter overlaten aan ingenieurs. Is het vak wel salonfähig? Met mijn benoeming aan deze universiteit, is de faculteit de enige aan de algemene universiteiten in Nederland waar stromingsleer onderdeel is van het reguliere natuurkunde curriculum. Is er misschien een goede reden waarom Uw zusterfaculteiten dit onderwerp mijden?

Osborne Reynolds heeft een grote invloed gehad op de stromingsleer, een invloed die we eren met het Reynoldsgetal: het product van de stromingssnelheid, de afmeting van het object, en gedeeld door de viscositeit. Een stroming wordt turbulent als het Reynoldsgetal een kritische waarde overschrijdt, en de turbulentie wordt sterker als het getal groter wordt. De kritische waarde is een intrinsieke eigenschap van de stroming die bereikt wordt zonder externe storingen. In de verstilde 19e eeuw vond Reynolds een kritische waarde van 13000, vandaag ligt die een stuk lager door het drukke verkeer in de buurt van het laboratorium.

Het ontstaan van turbulentie, en de dynamica van turbulente stromingen is één van de raadsels van de stromingsleer. Als ik me pathetisch mag uitdrukken: het is het laatste onopgeloste probleem van de klassieke fysica. Als dát niet salonfähig is! Zo'n uitdaging kan geen enkele natuurkunde faculteit laten liggen. Ik zal uitleggen wát het probleem is, en ik schets de recente ontwikkelingen omtrent de oplossing ervan.

Stromingsleer is fenomenologische natuurkunde. Het gaat om de beschrijving van een continuum: de vloeistof en het gas. De familienaam van de vorige spreker benadrukt het discrete karakter van de materie, die van mij het continuum. De wereld van atomen en moleculen zit verstopt in een constante in de wiskundige vergelijking van de stroming. Die constante is het getal van Reynolds. Als natuurkunde het vak is dat zoekt naar de vergelijkingen, en dan het liefst in termen van het allerkleinst denkbare deeltje, dan is stromingsleer een hopeloos verouderd vak. De vergelijking van de stromingsleer is de vroeg 19e eeuwse Navier-Stokes vergelijking. Dat is ook de vergelijking die turbulente stromingen beschrijft. Het is dan ook niet de vraag

naar welke vergelijkingen te gebruiken die het turbulentie-probleem zo moeilijk maakt, maar de oplossing van die vergelijkingen.

De Navier-Stokes vergelijking is niet-lineair en turbulentie is het gevolg van die niet-lineariteit. Lineair betekent dat het gevolg recht evenredig is met de oorzaak. Bij lineaire vergelijkingen geldt het principe dat de som van twee oplossingen weer een oplossing is. Dit principe leidt tot het uitgebreide gereedschap van oplossingsmethoden dat we de natuurkunde student traditioneel onderwijzen. Het principe faalt voor niet-lineaire vergelijkingen, er is geen standaard recept voor oplossingen meer. De oplossingen van niet-lineaire vergelijkingen kunnen dramatisch van karakter veranderen bij verandering van een parameter in de vergelijking. De oplossing kan zelfs chaotisch worden. In ons geval beschrijft de oplossing van een vergelijking de toestand van een dynamisch systeem op basis van de toestand in het verleden. Bij chaos is de baan van het systeem onregelmatig en is het onmogelijk om het uiteindelijke lot van de oplossing te voorspellen.

In de natuur kan de lineaire benadering slechts gebruikt worden als de verstoring van evenwicht klein is. Dat is was het geval bij al Uw middelbare school natuurkunde, en bij de meeste natuurkunde die we studenten onderwijzen. Als de uitwijking van evenwicht groot is, en dat is vaak zo, onderwijzen we dus leugens. Inzicht in de gevolgen van niet-lineariteit mag de student dan ook niet onthouden worden. Ik ben blij dat niet-lineaire dynamica onderdeel is van het standaard curriculum van deze faculteit.

Sinds Poincaré in 1886 bewees dat de beweging van drie hemellichamen onder invloed van hun onderlinge zwaartekrachtsveld (ook een niet-lineair probleem) niet in gesloten vorm kan



worden geschreven, is de studie van niet-lineaire systemen een belangrijke wiskundige activiteit. De resultaten daarvan zijn ingewikkeld en moeilijk toegankelijk voor niet-wiskundigen.

### *Chaos*

Het is daarom verbazingwekkend dat in de tachtiger jaren van de 20e eeuw, de niet-lineaire dynamica, die ik nu maar “chaostheorie” zal noemen, zich mocht koesteren in een grote belangstelling van natuurkundigen. Sterker nog, de chaostheorie werd de lieveling van het algemene publiek. Misschien was het publiek moe geworden van het orakel over de kleinste deeltjes in de natuurkunde, maar vooral was dat publiek gefascineerd door de nieuwe kijk op de eeuwenoude waarheden van oorzaak en gevolg die door de nieuwe dynamica geboden werd. In dynamische systemen gelden de 19e eeuwse wetten van oorzaak en gevolg: de toestand van het systeem nu bepaalt eenduidig die in de toekomst en die in het verleden. Het voorkomen van chaotische en onvoorspelbare oplossingen is in schijnbare tegenspraak met deze waarheid. De natuurkundigen waren vooral gefascineerd door de universaliteit van de weg naar chaos.

Er waren grootse verwachtingen dat de chaostheorie de sleutel zou vormen tot het begrip van turbulentie. Immers, turbulentie is ook wanorde, en ontstaat in een geordende stroming als we een constante in de vergelijking, het Reynolds getal, groter en groter laten worden. De natuurkundige Landau dacht dat voorbij het kritische Reynoldsgetal waar de stroming instabiel wordt, de stroming quasi-periodiek gedrag vertoont met steeds meer nieuwe frequenties die in een niet-rationele verhouding tot de vorige staan. Dat soort oplossingen worden “torussen” genoemd door wiskundigen. In een twee-torus zijn er twee frequenties en in een drie-torus drie.

In hun artikel *On the nature of turbulence* stelden Ruelle en Takens dat de weg naar steeds ingewikkelder quasi-periodiciteit meestal opgebroken is.<sup>2</sup> Ze bewezen dat in een niet-lineair systeem chaos verschijnt na de tweede frequentie. In een niet-lineair systeem overleven twee-torussen dus een verstoring meestal niet en ontstaat direct chaos. Twee-torussen kennen we als donuts: een Amerikaans gebakje met een gat erin. Het klopt, vier-dimensionale donuts heb ik nog niet gezien, U wel?

Chaos gaat over dynamische systemen met weinig vrijheidsgraden: slingers, eenvoudige mechanische constructies, dingen die slechts met een paar gewone niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen beschreven worden. Sterker nog, eenvoudige iteraties van de niet-lineaire functie

$$f(x) = 1 - ax^2$$

voldoen al om uiterst complex gedrag voort te brengen. Itereren is het volgende recept: kies een getal  $x$ , bereken daarmee  $f(x)$  volgens het bovenstaande voorschrift, bereken met het resultaat opnieuw  $f$ , enzovoorts. Het resultaat is de oneindig lange baan  $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x))))$ , ..., van een dynamisch systeem met  $x$  als beginpunt. Feigenbaum beschreef in het begin van de jaren 80 van de vorige eeuw in *The onset of turbulence* een universele weg naar chaos in dit uitzonderlijk simpele niet-lineaire systeem.<sup>3</sup> Universeel wil zeggen dat zo'n weg in bijna elke niet-lineaire dynamica te vinden is. Iteraties van de functie van zojuist vormen een prototype: een speeltuin om de weg naar chaos te leren begrijpen.

Nadat we altijd gedacht hadden dat elk niet-lineair systeem zo zijn eigen eigenaardigheden heeft, en we dat soort systemen liever overlieten aan wiskundigen, is dit nieuw. Natuurkundigen zijn dol

op het idee van universaliteit: eigenschappen die steeds weer terugkomen, ongeacht de details van het systeem. Er volgde een periode van bloeiend onderzoek naar het gedrag van niet-lineaire systemen, waarin door veelal jonge onderzoekers uit verschillende disciplines: wiskunde, natuurkunde, biologie en scheikunde werd samengewerkt. Een vernieuwing van het wetenschappelijk onderzoek waarvan de buitenkant werd beschreven door de bestseller *Chaos, the making of a new science* door James Gleick.<sup>4</sup> De sfeer van internationale conferenties was open en informeel. Op veel plaatsen, maar niet in Nederland, werden centra voor niet-lineaire dynamica opgericht.

Opwindend was het, maar over turbulentie was weinig te zegen, ondanks de titels van de twee smaakmakende artikelen die ik U noemde. De reden is dat de systemen van de niet-lineaire dynamica veel te eenvoudig zijn: ze bevatten niet de ruimtelijke uitgebreidheid die nodig is om stroming van een vloeistof te beschrijven. Dat is gemakkelijk te begrijpen. Het dynamisch systeem dat ik eerder noemde gaat over de lotgevallen van één getal  $x$ . Om een stroming te beschrijven is op zijn minst een videofilm nodig, terwijl de ultieme informatie bevat is in een driedimensionale film van het vectorveld.

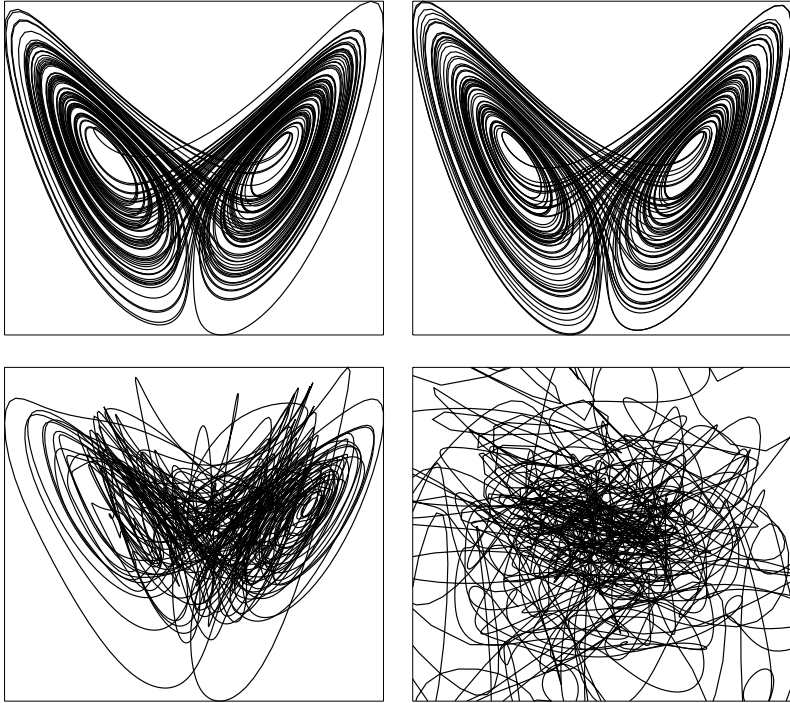
Toegegeven, de wiskundige Takens bewees dat meestal de geschiedenis van één getal  $x$  volstaat om chaos te karakteriseren.<sup>5</sup> Een mooie intrigerende stelling die echter veel experimenteel leed heeft veroorzaakt. Het is dan wel in principe mogelijk om het weer te voorspellen door regelmatig de thermometer af te lezen, maar praktisch is het niet.

## *De dood van de Lorenz vlinder*

Laat ik het einde van de pretentie van Chaos bezingen in een treurzang over [de vlinder van Lorenz](#).<sup>6</sup> U weet allen dat de weersgesteldheid chaos is. Het weer van volgende maand is onvoorspelbaar, in tegenstelling tot de bewering van de Enkhuizer almanak. Chaos wordt gekarakteriseerd door een grote gevoeligheid voor variatie van beginvoorwaarden. Zo kunnen kleine oorzaken grote gevolgen hebben. In ons dagelijkse leven is dat soms het geval, maar bij chaotische dynamica is dat voortdurend zo. Als een vlinder fladdert op het plein van de hemelse vrede in Peking, kan de kleine verstoring van de luchtstroming uiteindelijk tot storm in onze lage landen leiden: het vlinder effect.

De vlinder van Lorenz is de baan van een dynamisch systeem in zijn faseruimte. Dat dynamisch systeem is de extreme reductie van een door warmte gedreven stroming tot drie vrijheidsgraden: drie gekoppelde gewone differentiaalvergelijkingen. De stroming gebeurt tussen twee horizontale wanden waarvan de onderste warm en de bovenste koud is. Warme lucht stijgt op en koude lucht daalt neer. Daarbij speelt zowel de snelheid als de temperatuur van de lucht een rol. Aangezien snelheid en temperatuur van plaats tot plaats veranderen, moet dit verschijnsel beschreven worden door partiële differentiaalvergelijkingen die niet drie maar oneindig veel vrijheidsgraden bezitten. De weerkundige Lorenz reduceerde deze oneindigheid tot drie, maar het is niet zo moeilijk om dat aantal uit te breiden. Naarmate het aantal vrijheden groter is, verwachten we dat de werkelijkheid beter benaderd wordt.

De vlinder van Lorenz is een eigenschap van het aantal drie. Blijft de vlinder bestaan als dat getal groter wordt gemaakt?



**Figuur 2.** De vlinder van Lorenz is de chaotische baan van een dynamisch systeem met 3 vrijheden. Het systeem is een model voor de convectie tussen twee horizontale wanden waarvan de onderste warm en de bovenste koud is. De vlinder van Lorenz leeft als het aantal vrijheden uitgebreid wordt tot 8 (rechts boven), ze wordt verstoord bij 14 vrijheden (links onder), en sterft bij 21 graden van vrijheid (rechts onder). De vlinder van Lorenz is een aantrekker, in alle gevallen begint de baan in een punt buiten de vlinder.

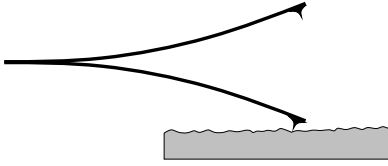
Leeft de vlinder ook in de oneindigheid van de oorspronkelijke door warmte gedreven stroming? In figuur 2 volgen we het lot van de vlinder. Hij overleeft als zijn vrijheden uitgebreid worden van 3 naar 8. Hij wordt ernstig verstoord bij 10 vrijheden, terwijl bij 21 vrijheden elke gelijkenis met de oorspronkelijke vlinder verdwenen is. Hij sterft en lijkt zich opnieuw ingesponnen te

hebben in zijn cocon. Deze treurige geschiedenis laat zien dat de les die we leren van eenvoudige niet-lineaire systemen niet opgaat als ruimtelijke uitgebreidheid essentieel is. Voor chaos met weinig vrijheden zijn er interessante nieuwe grootheden om wanorde te karakteriseren. We hebben ons best gedaan om die ook te meten in turbulente systemen. Het verbaast niet dat we weinig succes hadden, turbulentie is immers ruimtelijk uitgebreid.

De conclusie is dat chaos en turbulentie niet hetzelfde zijn. Voor asymptotisch lange tijden is de chaotische baan in een dynamisch systeem een vreemde aantrekker. Vreemd omdat de baan een bijzondere structuur heeft. Toen ik in Eindhoven begon leek, in het licht van de nieuwe dynamica, turbulentie een spannend onderwerp. Mijn achtergrond was atoomfysica, maar dit onderwerp was opwindend genoeg om het roer om te gooien. Mijn eerste vraag aan mijn nieuwe collega's was: "Waar zijn de vreemde aantrekkers?". Zij wisten niet waarover ik sprak, misschien maar goed ook, want nu weet ik dat ze er niet zijn.

Mijn versie van "The making of a new science" mag dan klinken als een afscheid van chaos, maar toch heeft de chaostheorie wel degelijk invloed op turbulentie. De weg is echter niet recht, en we volgen zijpaden. "Stroming in wanorde" is ook de verandering van de nieuwe wetenschap, de veranderende belangstelling van onderzoekers, en de verschuiving van paradigma's.

Gelukkig heeft de theorie van chaos nooit echt de status van de nieuwe kleren van de keizer bereikt. Chaostheorie is geen panacee geworden voor al Uw problemen. Met chaostheorie zult U niet beter speculeren op de aandelenbeurs. Ook zult U chaos niet omhelsd hebben als Uw levensfilosofie, of gebruiken als Uw nieuwe managementtechniek. Chaostheorie is gewoon geworden,



**Figuur 3.** Atomaire kracht-microscopie. Een trillende naald met een scherpe punt (afmeting 20 nm) raakt een atomaire oppervlak als zijn trillings-amplitude groot genoeg is. Dit is niet-lineaire dynamica, de uiterst complexe beweging van de naald kan beschreven worden door middel van iteraties van de functie  $f(x) = 1 + ax^{1/2}$

een stuk dagelijks gereedschap, minder spectaculair maar wel nuttiger. Om het gedachtengoed van de nieuwe wetenschap kunnen we niet meer heen. Niemand kan nog met droge ogen beweren dat we leven in een lineaire wereld waar het gevolg recht evenredig is met de oorzaak. Zoals gezegd, onderwijs moet er niet alleen zijn in lineaire, maar ook in niet-lineaire systemen.

Als voorbeeld van gewoon praktisch handwerk noem ik ons recent werk aan atomaire krachtmicroscopie. Atomaire kracht microscopie is een manier om individuele atomen aan een oppervlak zichtbaar te maken door er een heel spits naaldje overheen te slepen en de verticale afwijking van het naaldje te registreren, zoiets als de oude langspeelplaat. In een veelgebruikte vorm van deze techniek trilt het naaldje verticaal, en is de verandering van de trillingstoestand een indicatie van de nabijheid van het oppervlak. Denkt U daarbij aan een blinde die tikkend met zijn stok het oppervlak van zijn pad aftast. De dynamica, die zich op nanometer (miljardste meter) schaal afspeelt is uiterst niet-lineair en complex. Er ontbrak een krachtig ordeningsprincipe.

Tot onze verassing ontdekten we dat die dynamica dezelfde was als die van iteraties van de functie  $f(x) = 1 + ax^{1/2}$ ; als dit geen

eenvoudig ordeningsprincipe is! We ontdekten ook dat dit resultaat universeel is: de interactie tussen de naald en het oppervlak mag best ingewikkeld gemaakt worden, maar de essentie van de dynamica blijft nog steeds bevat in iteraties van de functie. Omdat de wiskundige beschrijving zo eenvoudig is, kan de complexe dynamica van de atomaire kracht microscoop nu analytisch begrepen worden. Op zo'n manier kunnen we gevoeliger microscopen maken.

Hoewel het lijkt of we van de hak op de tak springen, vormen iteraties van een functie de link met het voorafgaande. Dat maakte het mogelijk om de dynamica van de microscoop uit te kleden tot een prototype niet-lineariteit: de vierkantswortel. Terwijl Feigenbaum's artikel *The onset of turbulence* ging over het kwadraat.<sup>3</sup> In beide gevallen zijn er universele wegen naar wanorde, wanorde die echter geen turbulentie is.

### *Vormen en patronen*

Zo geven we de niet-lineaire dynamica van systemen zonder ruimtelijke uitgebreidheid weer terug aan de wiskunde en verschuiven ons blikveld naar systemen die dat wél hebben. Die systemen vertonen soms verbluffende patronen nét voorbij het punt waarop ze instabiel worden. Instabiel wil zeggen dat kleine verstoringen groeien, totdat ze zo groot worden dat niet-lineaire effecten stabiliserend werken. Het resultaat is het verschijnen van opmerkelijke patronen.

Een saillant voorbeeld van deze patroonvorming werd in 1831 door [Faraday](#) ontdekt.<sup>7</sup> Denkt U daarbij aan een kopje thee in Uw hand dat verticaal trilt. Als de uitwijking van de trillingen groot genoeg is, wordt het oppervlak grimpeld door een patroon van staande golven. Het trillende thee-oppervlak is instabiel, dankzij

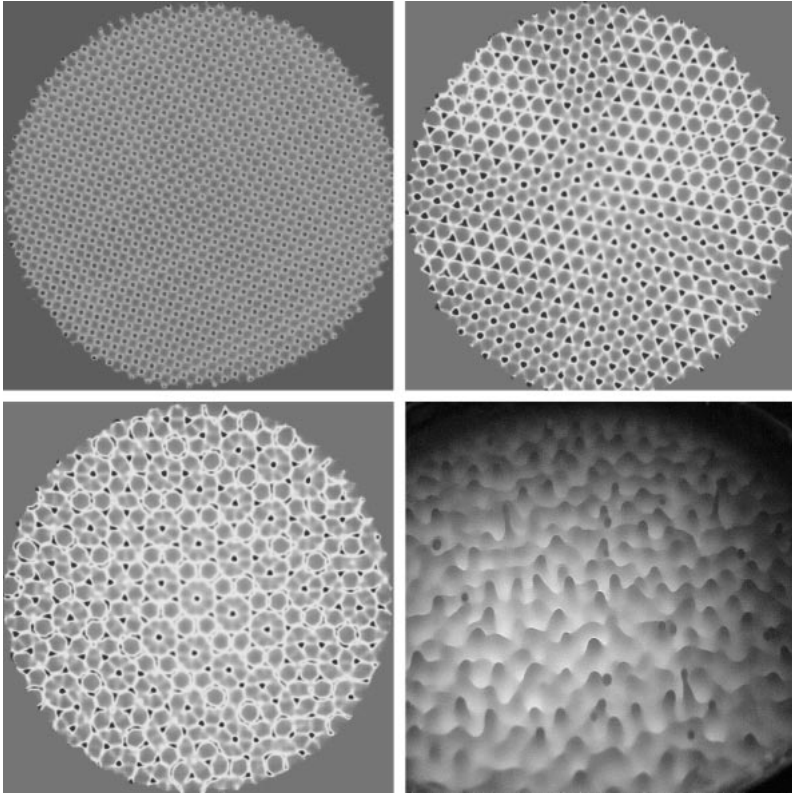


de instabiliteit groeien verstoringen van het perfecte vlakke oppervlak. De groei is niet onbegrensd, er is een stabiliserend effect dat verhindert dat  $U_w$  thee tegen het plafond spat. De natuur zorgt ervoor dat het plafond van de receptie droog blijft zoudelijk. Het is precies de niet-lineariteit van de golven die voor de stabilisatie zorgt.

Faraday zag het verschijnsel niet alleen in gewone vloeistoffen, maar ook in zand en het struif van rauwe eieren. Het is een verschijnsel uit de 19e eeuw dat we nu pas begrijpen, althans, voor kleine trillingsamplitudes. De reden ervan is dat het vrije oppervlak dat gerimpeld wordt één van de moeilijkste problemen uit de stromingsleer is. Pas na toepassing van de reductietechnieken van de nieuwe dynamica kon dit probleem, voor zwakke niet-lineariteit, opgelost worden.

Niet-lineariteit leidt tot de patronen die ik U nu toon. In Eindhoven hebben we geen kopje thee maar een erg nauwkeurig en groot experiment, waarin we precies harmonisch trillen met een precieze frequentie. Het is het grootste experiment voor Faraday golven ter wereld.

De figuren tonen een opeenvolging van golfpatronen in een bak met een ronde rand. Bij sommige frequenties zijn de patronen vierkant, bij andere zeshoekig (drievoudig symmetrisch) en weer bij andere hebben ze een hogere rotatiesymmetrie. Aangezien een vier- of meervoudige rotatiesymmetrie niet samen kan gaan met translatie invariantie zijn het quasikristallijne patronen. In quasikristallen wordt de regelmaat van een echt kristal subtiel gebroken. Het feit dat er vierkante patronen zijn in een ronde rand komt door de niet-lineariteit. In de lineaire wereld zijn patronen met een ronde rand natuurlijk gewoon rond.



**Figuur 4.** Het oppervlak van een verticaal trillende vloeistof in een ronde bak vertoont bij sommige trillingsfrequenties een vierkant patroon van staande golven, bij andere een zeshoekige honingraat structuur en weer bij andere een vier-voudig quasikristallic ordening (links onder). Als de aandrijving heel sterk is ontstaat er een wanordelijke toestand die aan turbulentie doet denken (rechts onder).

Typerend voor de stromingsleer is de zorg om de geometrische vorm van de rand. Bij elke nieuwe rand een nieuwe stroming lijkt het soms. Het is veel interessanter om stromingen te bestuderen die zich niets aantrekken van de vorm van de rand zodat de eigen

interne dynamica van de stroming tot uitdrukking komt. De patronen zijn daar één voorbeeld van, turbulentie een ander voorbeeld.

Bij sterkere aandrijving komen de stilstaande patronen plotseling tot leven en ontstaat er een toestand die aan turbulentie doet denken. Het is opmerkelijk dat, althans voor zwakke niet-lineariteit, de fenomenologie van deze turbulentie precies dezelfde is als die van Uw turbulente fietstocht die U hier bracht. Grote golven brengen kleinere golven voort, die op hun beurt nog kleinere golven voortbrengen, en die op hun beurt... Totdat de golflengte zo klein wordt dat de stroperigheid van de vloeistof elke golf uitpoetst.

De niet-lineaire dynamica van systemen die ruimtelijke uitgebreidheid bezitten en zoveel vrijheidsgraden kunnen exploreren als ze wensen, is volop in beweging. Het is geen gemakkelijk onderwerp, en samenwerking met theoretisch fysici en wiskundigen is nodig. Een uitdaging is om de dynamiek van het experimenteel onderzoek te behouden. Een onderwerp is spannend voor een experimenteel fysicus als het zijn eigen dynamica genereert: eenvoudige vragen die experimenteel te toetsen zijn, experimenten die nieuwe eenvoudige vragen oproepen, waarvoor nieuwe experimenten gedaan moeten worden. Een bloeiend experimenteel onderzoek mag nooit te moeilijk zijn, met een bezoek aan de wiskunde voor elke nieuwe vraag. Anderzijds behoeft de wiskunde nooit experimentele toetsing, de wiskunde is er immers gewoon. Daarom is ze vaak een onzekere gids voor experimenten.

## *Zelfgelijkendheid*

Na de ontvullerende constatering dat chaos geen turbulentie is, zijn we op zijpaden beland: ordelijke en wanordelijke patronen in niet-lineaire systemen met een ruimtelijke uitgebreidheid. Zelfgelijkendheid is een tweede omweg. Een ding is zelfgelijkend als zijn vorm niet verandert bij verandering van schaal. Een sneeuwvlok is daarvan een voorbeeld. Onder steeds verdere uitvergroting komen kleinere details in beeld, die dezelfde vorm hebben als de oorspronkelijke sneeuwvlok. Zelfgelijkendheid kunt U ook ervaren als U 's zomers staart naar de overzeilende stapelwolken (die ontstaan in een turbulente stroming).

Zelfgelijkendheid is een centraal idee in de meest succesvolle theorie van turbulentie die we hebben. Trouwens, wat moet een theorie van turbulentie eigenlijk voorspellen, wat is eigenlijk het probleem? Turbulentie is een stochastisch verschijnsel dat een statistische beschrijving behoeft. Ik zal me maar even over de verbazing heenzetten dat een deterministische vergelijking van de 19e eeuw een stochastische oplossing voortbrengt. Als er een theorie van turbulentie zou zijn, dan zou die theorie de statistische eigenschappen van de stroming moeten beschrijven. Inderdaad: die theorie bestaat niet, ondanks bevlogen en vasthoudende pogingen van velen: het "laatste onopgeloste probleem van de klassieke natuurkunde".

De wiskundige [Andrei Kolmogorov](#) stelde zestig jaar geleden dat sterke turbulentie zelfgelijkend is.<sup>8</sup> In turbulentie genereren grote wervels kleinere, en die kleinere wervels brengen nog kleinere voort... Totdat de wervels zo klein worden dat ze door de stroperigheid van het water uitgepoetst worden. U kunt zich daarvan vergewissen door over de brug te leunen en de wervels in het kolkende water achter de pijlers te volgen. De wervelingen in

het water hebben alle mogelijke groottes, van de afmeting van de pijler tot aan mini-wervels die minder dan een millimeter groot zijn. Bij sterke turbulentie, grote Reynoldsgetallen, vergeet de stroming de grootste schaal waar ze in beroering wordt gebracht, en heeft nog geen weet van de moleculaire structuur op de kleinste schaal. Het enige dat de kolkende stroming doet is energie transporteren van grootschalige beweging naar beweging op kleinere en kleinere schaal. Aangezien de stroming nu geen lengteschaal meer bezit, is ze zelfgelijkend geworden.

Zelfgelijkendheid impliceert dat er een algebraïsch verband is tussen de sterkte van een wervel  $u(x)$  en zijn afmeting  $x$ ,

$$u(x) = ax^\alpha$$

Kolmogorov voorspelde dat  $\alpha = 1/3$ , maar omdat er niets gezegd kan worden over de constante  $a$ , is die voorstelling nog geen echte theorie die het turbulentieprobleem oplost. De voorspelde  $1/3$  bleek echter in goede overeenkomst met experimenten te zijn. Totdat er zo'n 20 jaar geleden, door nieuwe experimenten barsten in de theorie verschenen.

### ***Gebroken zelfgelijkendheid***

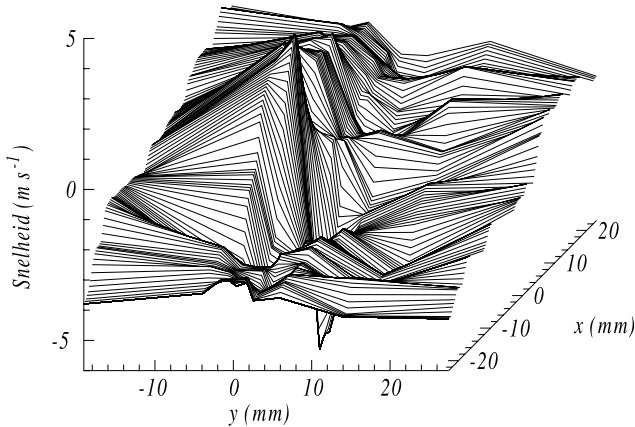
Een belangrijke directe invloed van de chaostheorie op turbulentie was de belangstelling voor nieuwe vormen van schaalinvariantie. Chaotische dynamica resulteert in bijzondere structuren in de faseruimte: vreemde aantrekkers. De vlinder van Lorenz is een voorbeeld van zo'n vreemde aantrekker. Het is de visuele aantrekkingskracht van deze beelden die de chaostheorie zo spannend maakt. Een vreemde aantrekker is vreemd omdat zijn dimensie een gebroken getal is. De meeste objecten in ons dagelijks leven zijn drie-dimensionaal, ze zijn twee-dimensionaal als ze tot een vlak beperkt zijn, en één-dimensionaal als ze op een

lijn leven. Een ding waarvan de dimensie een gebroken getal is leeft daar ergens tussenin. De dimensie is niets anders dan de exponent  $\alpha$  zoals hierboven. Eenvoudige strikt zelfgelijkende objecten hebben één dimensie, en maar één  $\alpha$ . Voor de objecten van de niet-lineaire dynamica is er echter niet één dimensie, maar is er een hele verzameling van  $\alpha$ 's. De strikte zelfgelijkendheid is gebroken.

Vrijwel tegelijkertijd werd ingezien dat ook turbulentie een gebroken zelfgelijkendheid heeft. Dit inzicht heeft tot een vernieuwde belangstelling voor turbulentie in de natuurkunde geleid, turbulentie werd weer salonfähig. Er werden nieuwe experimenten gedaan om de raadsels van de breuk te ontrafelen. In hun haast vergaten veel natuurkundigen wel eens de oude lessen van de stromingsleer over zorgvuldig experimenteren.

Uit de gelijmde scherven komt een duidelijk beeld naar voren: In sterke turbulentie is de breuk van de strikte zelfgelijkendheid universeel. Elk soort turbulentie wordt op dezelfde manier gebroken, onafhankelijk van hoe turbulentie gemaakt is. Als de stroming de grote schaal van de beroering vergeten is, is haar kleinschalige structuur een duizelingwekkend weefsel van in elkaar geschoven zelfgelijkendheden. Die structuur is dus dezelfde op de fiets, in de auto, en in het vliegtuig. In het jargon van de statistische fysica heet het dat sterke turbulentie gekarakteriseerd wordt door universele kritische exponenten. U denkt: dit klinkt als een subtiele zaak, wat zijn eigenlijk de kritische exponenten, komt het allemaal wel zo kritisch?

Gebroken zelfgelijkendheid betekent dat op kleine schaal turbulentie de neiging heeft tot extreme snelheidsfluctuaties. Het is alsof U, genietend van een zomerbriesje, plotseling door



**Figuur 5.** Een ongewoon heftige gebeurtenis in overigens rustige turbulentie die gemeten is in een windtunnel. Verticaal is de component van de windsnelheid in de x-richting uitgezet. De figuur registreert de passage van een microtornado. Een mug die de steile wand van dit snelheidsveld berijdt, ondergaat een versnelling van 300 maal de zwaartekrachtsversnelling.

een tornado uit Uw tuinstoel wordt gesleurd. Wees gerust, het komt maar zelden voor, en ook nog alleen als U heel klein bent.

In windtunnel experimenten is het mogelijk om, gebruikmakend van een standaard meettechniek, in een paar punten die dicht bij elkaar liggen het kleinschalige snelheidsveld te meten. In het signaal dat een dag duurt kunnen we zo op zoek gaan naar de allerhevigste verschijnselen. In het plaatje zien we een momentopname van het snelheidsveld in een windtunnel waarin een turbulente wind blaast met een gemiddelde snelheid van 10 meter per seconde (36 km per uur). De turbulente fluctuaties van de snelheid zijn een paar procent. Met die paar procent bedoel ik echter de standaard afwijking. Zoals te zien is die maat op kleine schaal absoluut niet relevant. Over niet meer dan drie millimeter komen snelheidsverschillen van niet minder dan 36 km per uur

voor. Dit gebeurt op kleine schaal: U kunt rustig blijven zitten in Uw tuinstoel, maar een mug die de steile wand berijdt van dit snelheidsveld, ondervindt een kracht van minstens 300g, driehonderd keer de versnelling van de zwaartekracht. Geen wonder dat een mug bij harde wind liever op een grashalm blijft zitten en pas weer danst in de stille lucht van de avondschemer.

Weliswaar kunnen we een mooie beschrijving geven in termen van gebroken zelfgelijkendheid, maar dat geeft nog geen antwoord op de vraag wat het toch is in turbulentie dat de energie opstuwt in zulke kleine structuren. Wat doen wervels met elkaar dat leidt tot zo'n radicale breuk van de symmetrie? Graag willen we antwoord geven op deze intrigerende vragen. Het begrijpen van de kleinschalige structuur van turbulentie doen we overigens niet alleen maar vanuit een hang naar het extreme. Fundamentele kennis dient als basis voor de modellering van de onopgeloste afstanden in praktische berekeningen.

We zouden naar de kleinste schalen kunnen kijken met computersimulaties van turbulentie. Die kleinste schalen worden bereikt bij de hoogste Reynoldsgetallen. Ondanks de exponentieel groeiende kracht van computers is vandaag het hoogst bereikbare Reynoldsgetal in een directe numerieke simulatie van turbulentie nog een factor 4 kleiner dan dat in een experiment in het laboratorium, terwijl de tijdsduur die gesimuleerd kan worden nog een factor miljoen kleiner is. Voor elke verdubbeling van het Reynoldsgetal is een factor 64 in rekenkracht nodig. Dat duurt 9 jaar volgens de wet van Moore die zegt dat de kracht van computers elke 18 maanden verdubbelt. Daarom is in turbulentie het experiment nog steeds een primaire bron van informatie.



Het is het goedkoopst om sterke turbulentie te maken in een luchtstroming: windtunnels. Hoewel de windtunnels in het laboratorium soms indrukwekkend groot lijken, is ook in het experiment het Reynoldsgetal dat gehaald kan worden niet groot genoeg. Krachtiger turbulentie is nodig om minder invloed te zien van de schaal waarop de turbulentie wordt gemaakt. Tevens zijn sommige voorspellingen van de theorie van gebroken zelfgelijkendheid afhankelijk van de logaritme van het Reynoldsgetal. Onderzoekers van turbulentie snakken daarom naar hogere Reynoldsgetallen. Sommigen doen dat door turbulentie te maken met complexe roerders, anderen bestuderen stromingen van gassen die zo koud of zo zwaar zijn dat hun viscositeit verdwijnt.

Turbulentie verspreidt meegevoerde verontreinigingen bijzonder effectief. De beste manier om melk in Uw thee te mengen is roeren. Het is de turbulentie in Uw kopje thee die de concentratie melk uiteindelijk homogeen maakt. Dat proces gaat gepaard met sterke fluctuaties van de concentratie die samenhangen met de sterke fluctuaties van de stromingssnelheid waar ik het eerder over had. Aangezien de fluctuaties van het snelheidsveld bijzonder zijn, zijn die van de concentratie dat ook. Voor de concentratie is de breuk van de zelfgelijkendheid zelfs sterker dan die voor de snelheid. Een belangrijke ontdekking in de laatste jaren is dat voor sommige snelheidsvelden, de kritische exponenten volgen uit een exacte wiskundige theorie. Zo kon voor het eerst een wiskundig bewijs voor gebroken zelfgelijkendheid gegeven worden.

### *Nieuwe experimentele technieken*

Bij sterke turbulentie in het laboratorium hebben de kleinste wervels een afmeting van tientallen microns (miljoenste meters). De bestaande meettechnieken zijn volstrekt ontoereikend om stromingen van lucht op zo'n kleine schaal te kunnen meten. Ik prijs me gelukkig dat ik met de groep laserspectroscopie aan deze Universiteit mag samenwerken aan nieuwe meetmethoden om te kunnen kijken in turbulente stromingen op zo'n kleine schaal. Daarbij gebruiken we onze kennis van de moleculaire structuur om de moleculen van lucht te kleuren met zeer krachtige lasers en zo patronen te vormen met een oplossend vermogen van tientallen microns. Het project is een synergie van laserspectroscopie en stromingsleer. Op die manier kan ik mijn oude vak en mijn nieuwe combineren.

Een niet onbelangrijk doel van het project is de ontwikkeling van nieuwe experimentele technieken voor de stromingsleer. In vergelijking met de rest van de natuurkunde zijn die in de stromingsleer namelijk niet erg geavanceerd. Dat hoeft ook niet als je net zo goed een computerexperiment kan doen, maar voor turbulentie gaat dat niet op.

Zoals gezegd ben ik een relatieve buitenstaander van de stromingsleer, en het verbaast me dat in dit vak het experiment vaak niet de primaire bron van informatie is. Experimenten in de stromingsleer worden vaak gedaan om iets te illustreren (wat we toch al wisten), of om de uitkomst van een computerberekening te verifiëren (die we toch al kenden). Verder is bijna elke onderzoeker in de stromingsleer van alle markten thuis, in het experiment, in computer modellering en in de wiskunde. Dat is een sterk punt van de studenten die we opleiden, maar het heeft ook het gevaar dat we nergens écht goed in zijn.

Deze Faculteit biedt unieke mogelijkheden om onderzoek in de stromingsleer te doen. U bent beroemd geworden met zwevende kikkers en zwevende vloeistof globulen. Waarom geen stromingsleer in gewichtsloosheid? Golven op zwevende globules thee hebben geen grens, zo zouden we turbulentie zonder grenzen kunnen bestuderen. Verder is er de toenemende verwevenheid van de natuurkunde met de biologie. Een eerste voorzichtige toenadering hebben we gezocht op het gebied van stromingen in de cel. Bij die gelegenheid hebben we elkaar eigenlijk alleen maar het getal uitgelegd waarmee dit verhaal begon: het getal van Reynolds, zo groot in turbulentie, dat in de cel juist heel klein is.

***Dames en heren studenten,***

We zijn gelukkig met Uw aanwezigheid aan deze faculteit. Maar waar zijn Uw vrienden, Uw klasgenoten? Waarom kozen zij niet allen voor de natuurkunde studie? We doen verschrikkelijk ons best om ons vak aantrekkelijk te maken voor U, maar we falen jammerlijk. Mijn collega's aan deze faculteit stelden een afstudeervariant "Toegepaste natuurkunde" in. Velen van U volgden het vak stromingsleer dat een onderdeel was van deze variant: geen quantummechanica, maar toch spannend en tot de verbeelding sprekend. Het hielp niet. Ons onderzoek is boeiend, dat mag na deze oraties wel duidelijk zijn, onze samenleving is in toenemende mate afhankelijk van de Beta wetenschappen, U bent nodig. Toch kozen Uw vrienden en kenissen niet voor ons.

Misschien zijn onze eerste studiejaren, waarin we "selecteren", té droog en té theoretisch. Deze faculteit heeft nieuwe spannende initiatieven genomen naar een bredere propaedeuse. Wie van ons zorgelijk kijkt over de teloorgang van onze discipline bedenke dat ook voor het vak stromingsleer onduidelijk was waar het hoort: is het een ingenieurs vak, is het wiskunde, is het natuurkunde?

Ik verheug me erop dat ik aan deze vernieuwing mag meedoen. Wie weet bent U straks afgestudeerd en kunt U geen differentiaalvergelijking oplossen; ach dat zien we dan wel weer (en reken maar dat we er iets aan doen). Dames en heren studenten, deze faculteit geeft veel om U; zegt het voort!

### ***Dankwoord en slot***

Als eerste wil ik hen bedanken die mijn benoeming hebben mogelijk gemaakt. Dat zijn het College van Bestuur van deze universiteit en de Stichting Nijmeegs Universitair Fonds. Hans ter Meulen heeft het initiatief genomen voor deze benoeming, en ik prijs me gelukkig dat ik met hem mag samenwerken aan stroming in wanorde. Ik zal mijn best doen om de goede samenwerking met de Faculteitsgemeenschap in Nijmegen voort te zetten en uit te breiden.

Mijn ouders en de hoofdonderwijzer in Almkerk stuurden mij naar de HBS. Dat was toen, daar, niet gebruikelijk. Het is mij een genoegen om ze daarvoor vanaf deze plaats te bedanken.

Mijnheer de Rector Magnificus, dames en heren, stromingsleer is een onderwerp dat niet misstaat in de opleiding aan een natuurkunde faculteit. Het onderwerp kent diepe en onopgeloste vragen die we niet kunnen laten liggen. Het is gemakkelijker om een glaasje te drinken dan de inhoud ervan te begrijpen.

Ik heb gezegd.

## ***Literatuur***

- 1 O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels*, Philos. Trans. **174** 935-82 (1883).
- 2 D. Ruelle en F. Takens, *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys. **20**, 167 (1971).
- 3 M.J. Feigenbaum, *The onset of turbulence*, Phys. Lett. **74a**, 375 (1979).
- 4 J. Gleick, *Chaos, making a new science* (1988).
- 5 F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, in *Lecture Notes in Mathematics*, No. 898 (Springer -Verlag 1981).
- 6 E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- 7 M. Faraday, *On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London **121**, 319 (1831).
- 8 A.N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid flow for very large Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk., **26**, 115 (1941). Herdrukt in Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **434**, 9-13 (1991).