Het gebruik van het begrip
Afstand bij digitale filtering

Rede uitgesproken bij het afscheidscollege van het ambt van bijzonder hoogleraar in de Signaalbewerking en Telecommunicatie aan de Faculteit der Natuurwetenschappen Wiskunde en Informatica, vanwege de Stichting Nijmeegs Universiteits Fonds (SNUF) van de Katholieke Universiteit Nijmegen op vrijdag 24 september 1999

Door

Dr.ir. J.B.H. Peek

Katholieke Universiteit Nijmegen

Mijnheer de Rector Magnificus,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Inleiding

In mijn augurele rede, nu elf jaar geleden, heb ik een overzicht van het vakgebied Digitale Signaalbewerking gegeven. Dit vakgebied heeft meerdere raakvlakken met andere vakgebieden. Enkele van deze raakvlakken, zoals die met de netwerk- en informatietheorie, heb ik toen toegelicht. Vaak geeft de studie van een probleem op zo'n raakvlak nieuwe, en soms zelfs verrassende, inzichten.
Bij digitale signaalbewerking spelen digitale filters een centrale rol. In deze afscheidsrede wil ik dieper ingaan op een onderwerp op het raakvlak tussen bepaalde digitale filters en een bepaalde vorm van coderen. Dit onderwerp fascineert mij reeds lange tijd. Onder coderen versta ik hier het bewerken van een digitaal signaal op zo'n manier dat dit, bij transmissie of registratie, een zekere bescherming tegen ruis en andere storingen verkrijgt. Bij de transmissie of registratie van digitale signalen worden al langer bepaalde digitale filters gebruikt om één of meerdere nulpunten in het frequentiespectrum van het signaal te creëren. Ik hoop u duidelijk te maken dat deze bewerking (dus: de creatie van nulpunten in het signaalspectrum) tevens een nuttige codering van het digitale signaal tot gevolg kan hebben. Deze codering komt tot uiting in een vergroting van de minimale onderlinge afstand tussen de verschillende mogelijke uitgangssignalen van het digitale filter. Indien deze afstand goed benut wordt, kunnen aan de ontvangstzijde van een transmissie- of registratiesysteem de storingen, veroorzaakt door ruis, voor een deel weer ongedaan gemaakt worden.

Nulpunten in het signaalspectrum door middel van een lineair tijdinvariant digitaal filter

Eén van de belangrijkste doelstellingen bij de transmissie en registratie van digitale informatie is om deze zo betrouwbaar mogelijk over te brengen. In de informatietheorie wordt het medium dat de digitale informatie moet transporteren "het kanaal" genoemd. Sommige van deze kanalen laten de frequentie nul, ook wel gelijkstroom genoemd, niet door. Dit is o.a. het geval bij magnetische en optische registratie en bij transmissie over aderparen waarin transformators voorkomen, zoals o.a. in telefoniesystemen gebruikt worden.
Indien wij aannemen dat het over te brengen signaal te representeren is door een reeks van statistisch onafhankelijke enen en min-enen:

$$1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ \ldots,$$

dan kan worden aangetoond dat het vermogensdichtheidsspectrum "wit" is. Dit wil zeggen dat alle frequenties in het signaal met dezelfde intensiteit voorkomen net zoals alle kleuren (frequenties) in de regenboog tezamen wit zonlicht geven. Een reeks van statistisch onafhankelijke enen en min-enen kan men zich in gedachten voorstellen tot stand te zijn gekomen door de achtereenvolgende worpen ("kruis" of "munt") van een

muntstuk, waarbij "kruis" wordt voorgesteld door "één" en "munt" door "min-één". De aanname van statistische onafhankelijkheid van enen en min-enen is in de praktijk gerechtvaardigd na efficiënte digitale broncodering van tekst, spraak, muziek en beeldsignalen.
Behalve het spectrum van zo'n signaal is er nog een ander aspect dat van belang is, namelijk het kleinste energieverschil dat tussen twee signalen mogelijk is. Dit kleinste verschil treedt op als de twee reeksen van enen en min-enen slechts op één positie verschillen en wel zo dat de ene reeks de waarde één en de andere de waarde min-één heeft. Het verschil (de afstand) in getalwaarde is 2 en dit wordt de minimum Euclidische afstand d_E tussen deze signalen genoemd. Het minimale energieverschil tussen de twee signalen is in dit geval:

$$E = d_E^2 = 2^2 = 4.$$

De minimum Euclidische afstand tussen twee signalen is een maat voor de mogelijkheid om deze van elkaar te onderscheiden en is daarmede tevens een maat voor de immuniteit van signalen tegen ruis.
Ieder getal uit de reeks van enen en min-enen wordt met eenzelfde pulsvorm p(t) overgebracht. Heeft het getal de waarde één, dan wordt p(t) verzonden, is deze min-één, dan wordt -p(t) verstuurd. Op deze wijze bestaat het te verzenden signaal uit een som van in de tijd verschoven pulsen met plus- en mintekens. In de ontvanger moet eerst het verzwakte signaal versterkt worden voordat verdere bewerkingen mogelijk zijn. Helaas wordt tijdens dit versterken ook de ruis versterkt. Na verdere signaalbewerking wordt aan het einde van ieder tijdsinterval de signaalwaarde bepaald. Indien het kanaal uitsluitend ruis toevoegt dan ontstaat na bepaling van de signaalwaarden b.v. de volgende reeks getallen:

-0,92 1,34 0,81 -1,24.

Het is niet moeilijk om op grond van ieder getal afzonderlijk te beslissen dat de reeks:

-1 1 1 -1

de meest waarschijnlijk verzonden reeks is. Dit komt omdat in dit geval de ruisvariatie klein t.o.v. de minimum Euclidische afstand 2 is.
Wordt echter de reeks van enen en min-enen over een kanaal verzonden dat de frequentie nul volledig onderdrukt, dan blijft er weinig van de oorspronkelijke minimum Euclidische afstand over. Deze sterk gereduceerde minimum Euclidische afstand wordt in hoofdzaak veroorzaakt door de onderdrukking van de nulfrequentie in het kanaal, waardoor het signaal op de ingang van de ontvanger gestoord wordt door de "nasleep" van eerder verzonden pulsen. Door deze vorm van storing en door de ruis kan uit de afzonderlijke getallen nu niet meer met grote betrouwbaarheid beslist worden of op een bepaald moment een één of min-één verzonden is.
De storing ten gevolge van eerder verzonden pulsen kan aanzienlijk gereduceerd worden door in het spectrum van het uit te zenden signaal een nulpunt bij de frequentie nul aan te brengen. Dit kan bereikt worden door het signaal bestaande uit een reeks van enen en min-enen met een digitaal filter te filteren. Door bijvoorbeeld het ingangssignaal van het filter, dat uit de reeks van enen en min-enen bestaat, over één tijdsafstand te vertragen en af te trekken van het onvertraagde signaal, ontstaat het uitgangssignaal:

ingangssignaal:	1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 . . .
vertraagd ingangssignaal:	1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 . . .
	—
uitgangssignaal:	0 -2 0 2 -2 2 0 0 -2 2 . . .

Dit uitgangssignaal bestaat uit een reeks getallen 2, 0 en -2. De getallen 2 en -2 wisselen elkaar altijd af en dit heeft tot gevolg dat de som van alle getallen over een tijdsinterval dat een even aantal 2 en -2 getalwaarden bevat nul is, zodat inderdaad de frequentie nul ontbreekt. Omdat de frequentie waarmede de getallen het filter verlaten dezelfde is als de frequentie waarmede de getallen op de ingang van het filter arriveren en er ook in het filter geen frequentie verandering optreedt, noemt men dit een tijdinvariant filter. Het zou hier te ver voeren om te laten zien hoe uit het uitgangssignaal de oorspronkelijke reeks enen en min-enen terug te winnen is. Het blijkt echter dat het gefilterde signaal beter geschikt is als zendsignaal voor een kanaal dat de frequentie nul onderdrukt. De storing door eerder verzonden pulsen is nu veel kleiner, waardoor de minimum Euclidische afstand aan de ontvangstzijde groter is en waardoor minder foutieve beslissingen in de ontvanger resulteren.

Op het eerste gezicht lijkt het voor de hand te liggen op grond van uitsluitend elk afzonderlijk ontvangen signaalwaarde te beslissen welke van de drie mogelijke getalwaarden ontvangen is, zoals dat bij de overdracht van enen en min-enen het geval is. In dat geval is echter de foutkans niet minimaal omdat beslist wordt op grond van een minimum Euclidische afstand 2 terwijl deze in feite 2 2 is. Dat de minimum Euclidische afstand inderdaad 2 2 is, volgt uit het feit dat twee uitgangssignalen minstens op twee momenten verschillen, waarbij het ene signaal uit twee nullen bestaat en het andere uit één getal 2 en één getal -2. Hierdoor is het minimum energieverschil $E' = 2^2 + 2^2 = 8$, waardoor $d_E' = \quad E' = 2 \quad 2$. Om deze grotere minimum Euclidische afstand optimaal te benutten ten einde het aantal foute beslissingen te minimaliseren moet de ontvanger de beslissing over het laatst verzonden getal ook laten afhangen van voorgaande ontvangen signaalwaarden. Dit vergt een meer complexe ontvanger. Daarvoor wordt vaak "Viterbi-decodering" toegepast, maar het zou hier te ver voeren om deze decodering te verklaren. Wat ik hier wil benadrukken is dat het digitale filter dat de frequentie nul volledig onderdrukt, tot gevolg heeft gehad dat de minimum Euclidische afstand tussen de uitgangssignalen groter wordt dan 2, waardoor de ruisimmuniteit is toegenomen. De hier beschreven methode heeft echter een nadeel dat ook bij gelijksoortige methoden zoals AMI (Alternate Mark Inversion) optreedt, n.l. dat lange reeksen van nullen in de ontvanger verlies van synchronisatie kunnen veroorzaken. Hoewel deze methoden nog niet zo lang geleden op grote schaal in transmissiesystemen werden toegepast, zijn deze nu verlaten en vervangen door betere methoden. Dit neemt echter niet weg dat het begrip minimum Euclidische afstand in relatie met digitale filters die nulpunten in het signaalspectrum genereren, nog steeds van belang is, zoals ik nader hoop duidelijk te maken.

Zo is het bij "partial response"-systemen van wezenlijk belang om in het spectrum van een digitaal signaal een nulpunt bij de hoogste signaalfrequentie, de z.g. Nyquist frequentie, aan te brengen. Deze systemen werden door Lender [1], en anderen, in de jaren zestig voorgesteld en zijn b.v. zeer geschikt om de bandbreedte van het te verzenden signaal tot de Nyquist-bandbreedte te beperken. Dit is vooral van belang voor radioverbindingen waarbij de bandbreedte, vanwege schaarste in het radiospectrum, minimaal dient te zijn. In alle "partial response"-systemen worden filters gebruikt om een nulpunt bij de hoogste signaalfrequentie in het spectrum aan te brengen. Al deze filters vergroten de minimum Euclidische afstand 2 tussen de uitgangssignalen. Het ene filter meer dan het andere. Echter, hoe groter de minimum Euclidische afstand, des te complexer zal de ontvanger moeten zijn om de hogere immuniteit tegen ruis volledig te kunnen benutten.

Nulpunten in het signaalspectrum d.m.v. een lineair tijdvariant digitaal filter

In 1988 ontdekte ik dat een aantal bekende transmissiecodes zoals "bifase" en "quadfase" maar ook "puls-amplitude-modulatie" met een bepaald type lineair tijdvariant digitaal filter te genereren zijn. Bij dit type filter is de frequentie waarmee de getallen op de ingang van het filter arriveren anders dan de frequentie waarmee deze het filter verlaten.
Zowel de bifase- als de quadfase-signaalcode bevatten geen frequentie nul. Hierdoor kreeg ik het sterke vermoeden dat een lineair tijdvariant digitaal filter nieuwe mogelijkheden kon bieden om nulpunten in het spectrum van een digitaal signaal aan te brengen.
Een tijdinvariant of tijdvariant digitaal filter is opgebouwd uit signaalvertragings-elementen, vermenigvuldigers waarmede signalen met coëfficiënten vermenigvuldigd worden, en optelelementen.
Een tijdvariant digitaal filter bevat echter ook nog elementen waarmede de frequentie van optreden van de getallen in het filter te verhogen of te verlagen is.

Vanaf 1989 heb ik samen met een aantal opeenvolgende afstuderende informatica-studenten, die tijdelijk op het Philips Natuurkundig Laboratorium in Eindhoven werkzaam waren, getracht dit nieuwe gebied in kaart te brengen. Daarbij waren de wiskundige inzichten en ook de ondersteuning van Dr. Ludo Tolhuizen, medewerker van dat laboratorium, van groot belang. Tijdens dit onderzoek werd al spoedig duidelijk dat met een lineair tijdvariant digitaal filter een nieuwe klasse van blokcodes, met nulpunten in het spectrum, te verkrijgen waren [2]. De werking van het tijdvariant filter kan met een niet-vierkante matrix van K rijen en L kolommen beschreven worden. Hiermede wordt een blok bestaande uit L enen en min-enen getransformeerd in een blok van K uitgaande getallen. Het quotiënt K/L geeft aan in welke mate het tijdvariant filter de frequentie van optreden van de getallen verandert.

Deze beschrijving van het genereren van een blokcode vertoont sterke overeenkomst met de generatormatrix zoals deze bij binaire blokcodes gebruikt wordt. Verder werd duidelijk dat met een tijdvariant digitaal filter nulpunten in het signaalspectrum bij de frequentie nul, de Nyquistfrequentie of bij beide te genereren waren.
Een eenvoudig voorbeeld van een code die een nulpunt bij de frequentie nul geeft, wordt door de volgende matrix gegeven:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Het ingangssignaal, bestaande uit enen en min-enen, kan ook worden opgevat te bestaan uit opeenvolgende blokken van ieder L=3 getallen. Ieder blok komt met een kolomvector van lengte L=3 overeen. Door vermenigvuldiging van de matrix met één kolomvector ontstaat een nieuwe kolomvector van lengte 4. Op deze wijze ontstaan achtereenvolgens uitgaande blokken van lengte K=4. Achtereenvolgende blokken vormen het uitgangssignaal van het tijdvariant digitaal filter. Voor dit filter is de frequentie van optreden van de uitgaande getallen dus K/L = 4/3 maal groter dan die van de ingaande enen en min-enen. In het totaal zijn er 8 verschillende ingangsblokken. Deze zijn met hun corresponderende uitgangsblokken in de volgende tabel gegeven:

ingangsblok			uitgangsblok			
1	1	1	2	0	0	-2
1	1	-1	2	0	-2	0
1	-1	1	0	2	0	-2
1	-1	-1	0	2	-2	0
-1	1	1	0	-2	2	0
-1	1	-1	0	-2	0	2
-1	-1	1	-2	0	2	0
-1	-1	-1	-2	0	0	2

Een uitgaand blok wordt ook wel een codewoord genoemd. Omdat ieder ingaand blok slechts met één codewoord correspondeert zijn de oorspronkelijke enen en min-enen altijd te reconstrueren. Voor ieder codewoord geldt dat de som van de vier getallen die het codewoord vormen, nul is. De frequentie nul ontbreekt dus en dit ongeacht de volgorde van de enen en min-enen op de ingang.. Nu kan het signaal dat gevormd wordt door opeenvolgende codewoorden in de tijd gebruikt worden voor transmissie door een kanaal dat de frequentie nul volledig onderdrukt. Zoals wij eerder zagen, zal dit in de ontvanger een geringere storing door eerder verzonden pulsen geven dan de directe transmissie van de enen en min-enen. Omdat in ieder uitgaand blok een wisseling van getalwaarden optreedt, is bovendien behoud van synchronisatie in de ontvanger verzekerd.
Om ondanks de ruis zo goed mogelijk te kunnen beslissen over de uitgezonden getalwaarden moeten wij eerst de minimum Euclidische afstand van deze blokcode kennen. Deze volgt uit de vaststelling dat ieder van de acht codewoorden minstens op twee plaatsen van elk ander codewoord verschilt. Hieruit volgt dat het minimum energieverschil tussen twee codewoorden gelijk is aan

$$E'' = 2^2 + 2^2 = 8.$$

De codewoorden hebben dus dezelfde minimum Euclidische afstand 2   2 als de eerder beschouwde signalen die met een tijdinvariant filter verkregen waren.
De decodering is echter eenvoudiger dan "Viterbi-decodering", als gebruik gemaakt wordt van het gegeven dat de som van de vier getallen in ieder blok nul moet zijn. Dit kan met het volgende voorbeeld verduidelijkt worden. Stel dat na toevoeging van ruis en verdere signaalbewerkingen in de ontvanger de volgende vier signaalwaarden, die tot één blok behoren, bepaald zijn:

0,3   0,6   -1,9   -0,2.

Na afronden van deze getallen op de drie waarden 2, 0 en -2 ontstaat:

0 0 -2 0.

Dit is geen codewoord, want de som van deze vier getallen is niet nul. Een fout is hoogst waarschijnlijk opgetreden daar waar de afrondingsfout het grootst is. De vier afrondingsfouten zijn:

0,3 0,6 0,1 -0,2.

Hiervan is 0,6 de grootste en daardoor is het tweede getal 0 het minst betrouwbaar. Door voor dit getal 0 het getal 2 te substitueren wordt de som van de getallen nul. Het uitgezonden codewoord is dus zeer waarschijnlijk

0 2 -2 0.

Deze methode wordt "Wagner-decodering" [3] genoemd en maakt zeer efficiënt gebruik van de minimum Euclidische afstand van deze code, waardoor de kans op een fout zo klein mogelijk wordt. Bovendien is "Wagner-decodering" eenvoudig te realiseren.

Blokcodes die met een tijdvariant filter verkregen zijn en die een dubbel nulpunt bij de frequentie nul hebben, geven aan de ontvangstzijde een nog grotere reductie van de storing door eerder verzonden pulsen.
Een voorbeeld van een blokcode met zo'n dubbel nulpunt bij de frequentie nul wordt door de volgende matrix gegeven:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Het met deze matrix corresponderende lineaire tijdvariante filter transformeert blokken van lengte L=4 (enen en min-enen) in blokken van lengte K=8 (nullen, tweeën en min-tweeën). In het totaal zijn er 16 verschillende ingangsblokken. Deze zijn met hun corresponderende uitgangsblokken in de volgende tabel gegeven:

<u>in</u>	<u>uit</u>	<u>in</u>	<u>uit</u>
1 1 1 1	2 0 0 -2 -2 0 0 2	-1 -1 -1 -1	-2 0 0 2 2 0 0 -2
1 1 1 -1	2 0 -2 0 0 -2 0 2	-1 -1 -1 1	-2 0 2 0 0 2 0 -2
1 1 -1 1	0 2 0 -2 -2 0 2 0	-1 -1 1 -1	0 -2 0 2 2 0 -2 0
1 1 -1 -1	0 2 -2 0 0 -2 2 0	-1 -1 1 1	0 -2 2 0 0 2 -2 0
1 -1 1 1	2 -2 0 0 -2 2 0 0	-1 1 -1 -1	-2 2 0 0 2 -2 0 0
1 -1 1 -1	2 -2 -2 2 0 0 0 0	-1 1 -1 1	-2 2 2 -2 0 0 0 0
1 -1 -1 1	0 0 0 0 -2 2 2 -2	-1 1 1 -1	0 0 0 0 2 -2 -2 2
1 -1 -1 -1	0 0 -2 2 0 0 2 -2	-1 1 1 1	0 0 2 -2 0 0 -2 2.

Opnieuw zien wij dat de som van de acht getallen in ieder uitgaand blok, nul is. De frequentie nul ontbreekt dus.
Indien wij de acht getallen waaruit de codewoorden bestaan met c_1 t/m c_8 aanduiden, dan geldt dus:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 = 0.$$

Maar omdat er een dubbel nulpunt bij de frequentie nul is, kan worden aangetoond [4] dat bovendien geldt:

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + 8c_8 = 0.$$

Zo geldt b.v. voor het eerste codewoord uit de tabel:

$$2 + 2(0) + 3(0) + 4\,(-2) + 5\,(-2) + 6(0) + 7(0) + 8(2) = 2 - 8 -10 + 16 = 0.$$

Dat deze twee vergelijkingen overeenkomen met de vergelijkingen die voor een "Reed-Solomon-code" gelden is een verrassend resultaat. Dit soort coïncidenties zijn in de wiskunde zelden toevallig en duiden meestal op een fundamenteel verband. Dit is ook hier het geval, maar het zou te ver voeren om dit hier nu in detail te verklaren.

Uit een nauwkeurige beschouwing van de 16 codewoorden blijkt dat deze onderling op minstens vier plaatsen verschillen. Zo verschillen het eerste en tweede codewoord uit de tabel op vier plaatsen. Hieruit volgt dat het minimum energieverschil tussen twee codewoorden gelijk is aan:

$$E''' = 2^2 + 2^2 +2^2 + 2^2 = 16.$$

De codewoorden hebben daardoor een minimum Euclidische afstand 4. Deze vergrote minimum Euclidische afstand kan benut worden om het aantal foutieve beslissingen in de ontvanger nog verder te verkleinen. Dit is te realiseren door na afronden van de 8 ontvangen getallen die tot één blok behoren, vast te stellen of deze aan de twee eerder genoemde vergelijkingen voldoen. Is dit niet het geval, dan is het mogelijk om, met de grootte van de afwijkingen en door gebruik te maken van de positie en het teken van de grootste afrondingsfout, maximaal twee fouten te corrigeren [4]. Het hiervoor benodigde rekenvoorschrift is eenvoudiger te realiseren dan dat van de "Viterbi-decodering".
In het algemeen impliceert een nulpunt in het spectrum dat de getallen in een blok aan één of meer voorwaarden voldoen. Van deze voorwaarden is dus met voordeel gebruik te maken bij de decodering.
Het is ook mogelijk om met een lineair tijdvariant filter blokcodes met nulpunten in het spectrum te genereren, waarbij het quotiënt K/L willekeurig klein ten opzichte van één is. Hoe kleiner dit quotiënt is, uit des te meer verschillende gehele getallen dan alleen de getallen 2, 0 en -2 zal elk uitgaand blok bestaan en des te kleiner zal de bandbreedte van het te verzenden signaal zijn.

De eenvoudige manier waarop deze blokcodes, waarvan ik enkele getoond heb, te genereren en te beschrijven zijn en de eenvoudige optimale decodering, maken hun toepassing aantrekkelijk. Toch zijn deze toepassingen tot nu toe nog niet gesignaleerd.

Mijn bedoeling met deze lezing was om u duidelijk te maken dat bepaalde lineaire digitale filters de minimum Euclidische afstand tussen de uitgangssignalen van deze filters op een voorspelbare èn bruikbare manier beïnvloeden. Ik hoop dat u deze boodschap zonder al te veel storing hebt kunnen decoderen.

Dankwoord

Waarde bestuursleden van de Stichting Nijmeegs Universiteitsfonds,

Twaalf jaar geleden hebt u deze bijzondere leerstoel gevestigd. Gedurende al die jaren hebt u mijn activiteiten gesteund waarvoor ik u zeer erkentelijk ben. Van de bijzondere hoogleraren in uw Stichting vraagt u een jaarlijkse verslaggeving en verantwoording. Ik heb altijd met instemming aan dit verzoek voldaan en het ook altijd een goede bestuursmaatregel gevonden dat u de prestaties ieder jaar door een onafhankelijke commissie van toezicht hebt laten beoordelen.

Beste Frits Vaandrager,

Ik heb jou leren kennen en waarderen als een collega wetenschapper maar ook als een mens die zich kan verplaatsen in de gedachten en gevoelens van een ander. Voor de goede samenwerking en voor je hulp wil ik je bedanken. Ik wens jou, en mijn collega's in jouw groep, een voorspoedige toekomst.

Tenslotte ben ik mijn vrouw Tine diepgaand dank verschuldigd. Zonder haar hulp en steun zou mijn wetenschappelijke loopbaan onmogelijk zijn geweest.

Zeer gewaardeerde toehoorders, beste vrienden, ik dank u voor uw aandacht.

Referenties

[1] A. Lender, "Correlative Level Coding for Binary Data Transmission", IEEE Spectrum, Vol. 3, pp. 104-115, February 1966.

[2] J.B.H. Peek and L.F.P.M. Lakeman, "Generating Block Line Codes with Spectrum Nulls Using Multirate Digital Filters", Proc. IEEE International Conference on Communication, Denver, Colorado, pp. 1098-1102, June 1991.

[3] R.A. Silverman and M. Balser, "Coding for Constant Data Rate Systems", IRE Trans. Information Theory, Vol. 4, September 1954, pp. 50-63.

[4] J.B.H. Peek, "Multirate Block Codes", Proc. of the 20th Symposium on Information Theory in the Benelux, May 27 and 28, 1999, Haasrode, Belgium, ISBN 90-71048-14-4.